

平成29年度 修士論文

グラフ変換と一般化確率伝播法に基づく

MIMO 信号検出法に関する研究

学籍番号 1631062

氏 名 執行 彬秀

指導教員 石橋 功至 准教授

電気通信大学 情報理工学研究科

情報・ネットワーク工学専攻

提出日 平成30年3月13日



---

## 概要

MIMO (Multi-Input Multi-Output) 伝送における効率的復調法として、通信路行列で定義されるファクターグラフ上でのメッセージ交換により復調を行う確率伝播 (BP: Belief Propagation) 法がある。通信路行列により定義されるファクターグラフには多数のショートループが存在するため、その復調特性には高いエラーフロアが現れ、最尤復調 (MLD: Maximum Likelihood Detection) に遠く及ばないことが知られている。そこで本研究では、ファクターグラフ上の複数の変数ノードと観測ノードの集合から構成される領域グラフ上でメッセージ交換を行うことで、ショートループの影響を緩和し、優れた復調特性を実現する QR 分解付き一般化確率伝播 (QR-GBP: QR-Decomposed Generalized Belief Propagation) 法を提案する。QR-GBP 法は MLD に漸近する復調特性を示すものの、各メッセージの計算に要する演算量は、アンテナ数と変調多値数に対して指数的に増加してしまう、そこで併せて QR-GBP 法の演算量を削減する手法を提案し、計算機シミュレーションにより MLD に漸近する性能が得られることを示す。

---

## 目 次

第 1 章	序論	2
1.1	研究背景	2
1.2	本論文の構成	3
第 2 章	MIMO システム	4
2.1	システムモデル	4
2.2	最尤検出	5
2.3	空間フィルタリング	6
2.3.1	MF 法	6
2.3.2	ZF 法	6
2.3.3	MMSE 法	7
2.3.4	数値例	7
第 3 章	確率伝播法に基づく復調	9
3.1	確率伝播法	9
3.1.1	確率伝播法に基づく繰り返し復調	11
3.1.2	QR 分解付き確率伝播法	12
3.1.3	数値例	13
第 4 章	提案手法	16
4.1	QR 分解付き一般化確率伝播法に基づく復調	16
4.1.1	領域グラフが満たすべき条件	18
4.1.2	打ち切り領域グラフ	20
4.1.3	対数領域 QR 分解付き確率的一般化確率伝播法	20
4.2	数値例	22
第 5 章	QR-GBP 法の演算量低減手法	25
5.1	QR 分解付き確率的一般化確率伝播法	25
5.1.1	演算量の比較	27
5.1.2	数値例	27
5.2	SMR 付き QR-GBP 法	29
5.2.1	数値例	30
5.3	エッジ削減 QR-GBP 法	36
5.3.1	領域グラフが満たすべき条件	37
5.3.2	演算量の比較	39
5.3.3	数値例	44
第 6 章	結論	46

---

謝辞	46
関連発表	47

## 目 次

2.1	$N_t$ 本の送信アンテナと $N_r$ 本の受信アンテナを持つ MIMO システムモデル	5
2.2	空間フィルタリング各種の BER 特性	8
3.1	木構造を持つファクターグラフ	10
3.2	通信路行列 $\mathbf{H}$ によって定義されるファクターグラフ. 丸は変数ノードを意味し, $N_t$ 個の送信信号に対応している. 四角は観測ノードを意味し, $N_r$ 個の受信信号に対応している	11
3.3	QR 分解後の等価通信路行列 $\mathbf{R}$ によって定義されるファクターグラフ	13
3.4	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の BP 法と QR-BP 法の BER の比較	14
3.5	$(N_t, N_r) = (8, 8)$ の時の BP 法と QR-BP 法の BER の比較	15
4.1	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の QR 分解後のファクターグラフから構築された有効な領域グラフ	17
4.2	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の QR 分解後のファクターグラフから構築された打ち切り領域グラフ	20
4.3	一様分布時の領域グラフ全体のエントロピーと一様分布ではない時の領域グラフ全体のエントロピーの比較	21
4.4	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法の BER 特性	23
4.5	$(N_t, N_r) = (8, 8)$ の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法の BER 特性	24
5.1	$(N_t, N_r) = (2, 2), (4, 4)$ とした時の, SGBP 法と GBP 法の乗算回数の比較	27
5.2	$(N_t, N_r) = (2, 2)$ とした時の, SGBP 法, GBP 法, MLD の BER 特性	28
5.3	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の BP 法, QR-GBP 法, SMR 付き QR-GBP 法, MLD の BER 特性	32
5.4	$(N_t, N_r) = (8, 8)$ の時の BP 法, QR-GBP 法, SMR 付き QR-GBP 法, MLD の BER 特性	33
5.5	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の繰り返し毎の Max-log 近似の正しい解が選択される確率	34
5.6	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の繰り返し毎の Max-log 近似の正しい解が選択される確率	35
5.7	打ち切り領域グラフから周辺化項が 2 つ以上のメッセージを取り除いた有効な領域グラフ	37
5.8	ER-QR-GBP 法の領域グラフ全体のエントロピー	38
5.9	$M = 2$ とした時の送受信アンテナ数に対する演算量	40
5.10	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ とした時の変調多値数に対する演算量	41
5.11	$(N_t, N_r) = (8, 8)$ とした時の変調多値数に対する演算量	42
5.12	$M = 16$ とした時の送受信アンテナ数に対する演算量	43

---

5.13	$(N_t, N_r) = (4, 4)$ の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法, ER-QR-GBP 法, MLD の BER 特性 . . . . .	44
5.14	$(N_t, N_r) = (8, 8)$ の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法, ER-QR-GBP 法, MLD の BER 特性 . . . . .	45

# 第1章 序論

## 1.1 研究背景

複数の送受信アンテナを用いて並列伝送を行うことで、通信路容量を線形に増大可能な多入力多出力（MIMO: Multi-Input Multi-Output）伝送が注目を集めている。MIMO 伝送では、高い周波数効率を実現できる一方、受信機において多重化された信号から所望の信号を分離・検出する必要がある。

最尤推定法（MLD: Maximum Likelihood Detection）は最も優れた復調性能を示すことで知られているが、アンテナ数や変調多値数に対して演算量が指数的に増加してしまう。比較的演算量の少ない手法として、Zero-Forcing (ZF) 法や最小平均二乗誤差（MMSE: Minimum Mean Square Error）法などの線形空間フィルタリング法が知られているが、MLD と比較して、著しく復調特性が劣化してしまう。

効率的にシンボル単位最大事後確率（MAP: Maximum A Posteriori）復調を実現可能な手法として確率伝播（BP: Belief Propagation）法に基づく復調が提案されている [1]。BP 法（もしくは信念伝播法）は、変数ノードと観測ノードからなるファクターグラフ上でのメッセージ交換により、効率的に周辺事後確率を計算する手法として知られている [2]。BP アルゴリズムでは隣接ノード間でのメッセージ交換により主観確率が繰り返し計算され、ファクターグラフ上にループが存在しない場合には正確にその周辺確率を計算することができる。またグラフにループを含む場合にも、グラフが疎な場合には、その周辺確率を高い精度で計算することが可能であることが知られている [3]。

BP 法に基づく MIMO 復調法におけるファクターグラフは通信路行列により定義されるが、全変数ノードと関数ノードが互いに結合しているため、多数のショートループが存在し、その復調性能は MLD と比べると著しく劣化してしまうだけでなく、高いエラーフロアを示す [4]。ループによる特性劣化の問題に対して、文献 [5] では、QR 分解付き BP (QR-BP: QR-decomposed BP) 法が提案されている。QR-BP 法では、通信路行列に QR 分解を用いることでファクターグラフをショートループの少ない構造に変換し、その結果、収束特性を向上させている。しかしファクターグラフから完全にループを除去することはできないため、依然として復調特性の劣化が見られる。

ループを持ったグラフにおいて、より正確に周辺事後確率を求める手法として、一般化確率伝播（GBP: Generalized BP）法が文献 [3] において提案されている。GBP 法ではファクターグラフ上の幾つかのノードの集合から領域グラフ（region graph）と呼ばれるグラフを構成し、このグラフ上でのメッセージ交換によって、より正確な周辺事後確率を計算することができる。文献 [6] では、いくつかの 2 次元干渉通信路に対して GBP 法を適用した場合の復調特性について検討しており、いずれの場合においても、GBP 法が MAP 復調に漸近する優れた復調特性を達成可能であることを数値的に示している。周波数非選択性 MIMO 通信路においては、ファクターグラフ

は変数および関数ノードが互いに全て繋がった構造となるが、そのようなファクターグラフから形成された領域グラフ上では GBP 法は MLD と同じ計算をすることになり、莫大な演算量が再び問題となる。

本研究では、MLD と同じ計算をすることによる演算量増加の問題を避けるために、文献 [7] では、QR 分解を用いて等価通信路行列を変換することで、ファクターグラフを変換し、GBP 法を適用した QR 分解付き一般化確率伝播 (QR-GBP: QR-decomposed GBP) 法を提案する。QR-GBP 法は MLD に漸近する高い復調性能を示すものの、GBP 法におけるメッセージ伝播アルゴリズムである parent-to-child アルゴリズムの演算量は、アンテナ数および変調多値数の増加に伴って指数的に増加してしまうことが知られている。これは各領域間のメッセージ計算に複数の周辺化を含むことが要因であり、繰り返しごとに膨大な演算量を要する QR-GBP 法は実用上、現実的ではない。そこで本研究では QR-GBP 法と併せて、その演算量低減手法である QR 分解付き確率一般化確率伝播 (QR-SGBP: QR-Stochastic GBP) 法 [8], SMR (Smart Message Reduction) 付き QR-GBP 法 [9], エッジ削減 QR-GBP (ER-QR-GBP: Edge Reduced QR-GBP) 法を提案する。

QR-SGBP 法は、メッセージ更新に要する周辺化計算をモンテカルロ積分に置き換えることで演算量を低減する手法である [10]。多値変調環境下においては、一回の繰り返しにおけるメッセージの乗算回数を減らすことで、演算量の低減が可能である。しかし直交位相偏移変調 (QPSK: Quadrature Phase Shift Keying) 環境下では乗算回数は変わらない。また、QR-SGBP 法は領域グラフ上の一部のメッセージのみにしか適用できず、モンテカルロ積分への置き換えができないメッセージの周辺化計算がボトルネックになるという問題がある。

SMR 付き QR-GBP 法は、QR 分解後の領域グラフの構造を利用して、メッセージ更新に用いるメッセージの数を効率的に削減する手法である。メッセージ更新時の周辺化計算に Max-log 近似を適用可能なことを利用し、効率的に最大値を見つけ出すことが可能であるが、アンテナ数の増加に伴い最大値を見逃す確率が高くなってしまいビット誤り率 (BER: Bit Error Rate) 特性が大幅に劣化してしまうという問題がある。

ER-QR-GBP 法は、グラフ構造を変化させることで QR-GBP 法のメッセージ更新時の周辺化演算量を大幅に低減する手法である。QR-GBP 法のメッセージ更新において、周辺化される変数の数は各メッセージで異なる。そこで、ER-QR-GBP 法では周辺化の必要な変数が 1 つ以下のメッセージだけを更新し、他のメッセージを領域グラフから取り除くことで領域グラフ上の一部のメッセージの演算量を低減するだけでなく、全体の復調演算量を大幅に低減する。

これらの提案手法について計算機シミュレーションから演算量を低減しつつ MLD に漸近する性能が得られることを示す。

## 1.2 本論文の構成

本論文の以降の構成は以下の通りである。第 2 章で、本研究で想定する MIMO システムのシステムモデルと従来の MIMO 復調法について述べる。第 3 章では BP アルゴリズムに基づく復調法について説明する。第 4 章で、提案手法である QR-GBP 法に基づく復調法について説明し、第 5 章では QR-GBP 法の演算量低減手法について述べる。最後に、第 6 章で本論文を総括する。



## 第2章 MIMO システム

この章では送受信機がそれぞれ複数のアンテナを具備した MIMO システムについて述べる。MIMO システムでは複数の送信アンテナから異なる信号を並列伝送することで通信路容量が増加することが知られているが、空間的に多重化された信号を受信機で分離する必要がある。その分離技術として最も良いビット誤り率 (BER: Bit Error Rate) 特性が得られる最尤検出と、受信信号に線形変換を施すことで SISO (Single Input Single Output) に分離して復調を行う空間フィルタリングについて述べ、それらの BER 特性を示す。

### 2.1 システムモデル

図 2.1 に、本稿で扱う  $N_t$  本の送信アンテナと  $N_r$  本の受信アンテナから構成される MIMO システムモデルを示す。  $j = 1, \dots, N_t$  番目のアンテナから送信される信号を  $x_j$  とし、変調方式は二相位相偏移変調 (BPSK: Binary Phase Shift Keying) とする。また、  $i = 1, \dots, N_r$  番目のアンテナで受信される信号を  $y_i$  とし、すべての通信路は周波数非選択性のブロックレイリーフェーディング環境を仮定する。  $j$  番目の送信アンテナと  $i$  番目の受信アンテナ間のチャネル係数  $h_{ij}$  は、それぞれ平均 0、分散  $\frac{1}{2}$  の互いに独立なガウス分布に従うものとし、受信側で通信路状態情報 (CSI: Channel State Information) は既知とする。このとき、  $i$  番目のアンテナで受信される信号は、

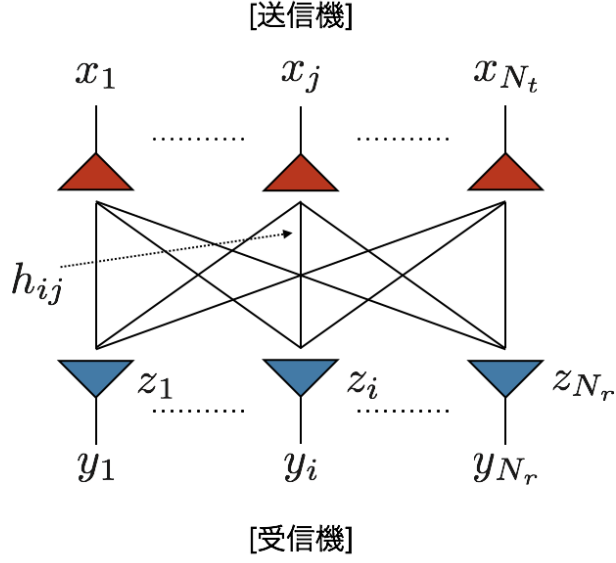
$$y_i = \sum_{j=1}^{N_t} h_{ij} x_j + z_i \quad (2.1)$$

と表される。また  $k$  番目の送信信号に着目すると以下のように  $i$  番目の受信信号を表すことができる。

$$y_i = h_{ik} x_k + \sum_{j=1, j \neq k}^{N_t} h_{ij} x_j + z_i \quad (2.2)$$

ここで、  $z_i$  は平均 0、分散  $\frac{N_0}{2}$  に従う加法性白色ガウス雑音 (AWGN: Additive White Gaussian Noise) である。送信信号ベクトルを  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_j, \dots, x_{N_t}]^T$ 、受信信号ベクトルを  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_i, \dots, y_{N_r}]^T$ 、雑音ベクトルを  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_i, \dots, z_{N_r}]^T$  とし、チャネル係数  $h_{ij}$  をそれぞれ要素に持つ  $N_r \times N_t$  のチャネル行列  $\mathbf{H}$  を

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N_t} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r 1} & h_{N_r 2} & \dots & h_{N_r N_t} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$


 図 2.1:  $N_t$  本の送信アンテナと  $N_r$  本の受信アンテナを持つ MIMO システムモデル

と定義すると、受信信号ベクトルは以下の式で表される。

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (2.4)$$

## 2.2 最尤検出

MIMO システムにおける信号検出において最も性能が良い手法は MLD である。MLD では全送信信号系列候補の中から受信信号系列に対して最も尤度の高い系列を推定送信信号系列  $\hat{\mathbf{x}}$  として出力する。受信信号の分布は  $N_r$  次元のガウス分布であり、以下の式で与えられる。

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{H}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\pi^{N_r} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \right] \quad (2.5)$$

ここで  $\boldsymbol{\Sigma}$  は受信信号ベクトルの分散共分散行列であり、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{E} [(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T] \quad (2.6)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{N_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N_0}{2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

で与えられる。(2.5) 式は以下の比例関係が成り立つので,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{H}, \hat{\mathbf{x}}) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \right] \quad (2.8)$$

$$= \exp \left[ -\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}|^2}{N_0} \right] \quad (2.9)$$

となり, MLD では  $|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}|^2$  を最小化する  $\hat{\mathbf{x}}$  を出力することになる. しかし  $M$  値変調信号を用いる場合, 送信信号系列候補は  $M^{N_t}$  通り存在しており, 送信アンテナ数と変調多値数の増加に伴い要する演算量が指数的に増大するため現実的な手法ではない.

## 2.3 空間フィルタリング

空間フィルタリングとは, (2.4) 式で与えられる受信信号ベクトル  $\mathbf{y}$  に対して変形行列  $\mathbf{G}$  による線形変換を施すことで MIMO システムを SISO (Single Input Single Output) に分離して, 以下のように推定送信信号ベクトル  $\hat{\mathbf{x}}$  を出力する手法である.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (2.10)$$

以降では空間フィルタリング手法である, 整合フィルタ (MF: Matched Filter) 法, ZF (Zero Forcing) 法, 最小平均二乗誤差 (MMSE: Minimum Mean Square Error) 法について述べる.

### 2.3.1 MF 法

MF 法で用いられる変形行列は  $\mathbf{G} = \mathbf{H}^T$  で与えられる. (2.4) 式に変形行列  $\mathbf{G}$  を乗算することで, 以下のように推定送信信号ベクトルが得られる.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{G}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.11)$$

MF は所望信号と干渉成分との電力比を最大化するため低信号対雑音電力比 (SNR: Signal to Noise power Ratio) では良好な特性が得られる.

### 2.3.2 ZF 法

ZF 法で用いられる変形行列はチャネル行列  $\mathbf{H}$  の一般化逆行列  $\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$  で与えられ, 推定送信信号ベクトルは次式で表される.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{G}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{z} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

このように, チャネル行列が単位行列に変形されるため, 干渉成分を完全に打ち消すことができる. しかし, 変形行列の乗算により雑音が強調されるため, 低 SNR 領域においては MF 法よりも特性が悪くなる.

### 2.3.3 MMSE 法

MMSE 法では、推定送信信号と実際の送信信号との平均 2 乗誤差を最小にするような変形行列を用い、その変形行列は  $\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_r})^{-1} \mathbf{H}^T$  として与えられる。この変形行列は高 SNR では

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (2.13)$$

と、ZF 法の変形行列に近似でき、低 SNR では

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}^T \quad (2.14)$$

として、MF 法の変形行列の定数倍に近似できるため両者の特性を併せ持つ。さらに MMSE 法では雑音分散を考慮するため、高 SNR 領域、低 SNR 領域どちらにおいても MF 法、ZF 法よりも良好な特性が得られるが、MF 法、ZF 法と違い受信機で雑音分散を知る必要がある。

### 2.3.4 数値例

図 2.2 に空間フィルタリング各種の BER 特性を示す。シミュレーションの諸元は表 2.1 に示す。

表 2.1: 空間フィルタリング特性比較シミュレーション諸元

送受信アンテナ数	8, 32, 128
変調方式	BPSK
検出方式	MF, ZF, MMSE

ZF 法、MF 法に関してはアンテナ数を増やすことで特性が著しく劣化していることがわかる。その理由として、MF 法では干渉成分を取り除くことができないため、アンテナ数の増加に伴い性能が劣化している。また、ZF 法は干渉成分を取り除くことはできているが、雑音に変形行列がかかることによる雑音強調の影響で性能が劣化している。一方 MMSE 法は雑音分散を考慮した上で干渉成分を取り除く手法であるため、ZF 法に見られるようなアンテナ数の増加による性能の悪化は見られない。さらに、アンテナ数の増加に伴いチャネル行列  $\mathbf{H}$  のグラム行列  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  が対角行列に近づくために SISO への分離が簡単となり、MMSE 法では送受信アンテナ数が多いほど良好な特性が得られる。しかし MMSE 法は  $\mathcal{O}(N_t^3)$  の演算を要するため、大規模 MIMO のような送受信アンテナを数十から数百用いるような場合には実用的な手法ではない。

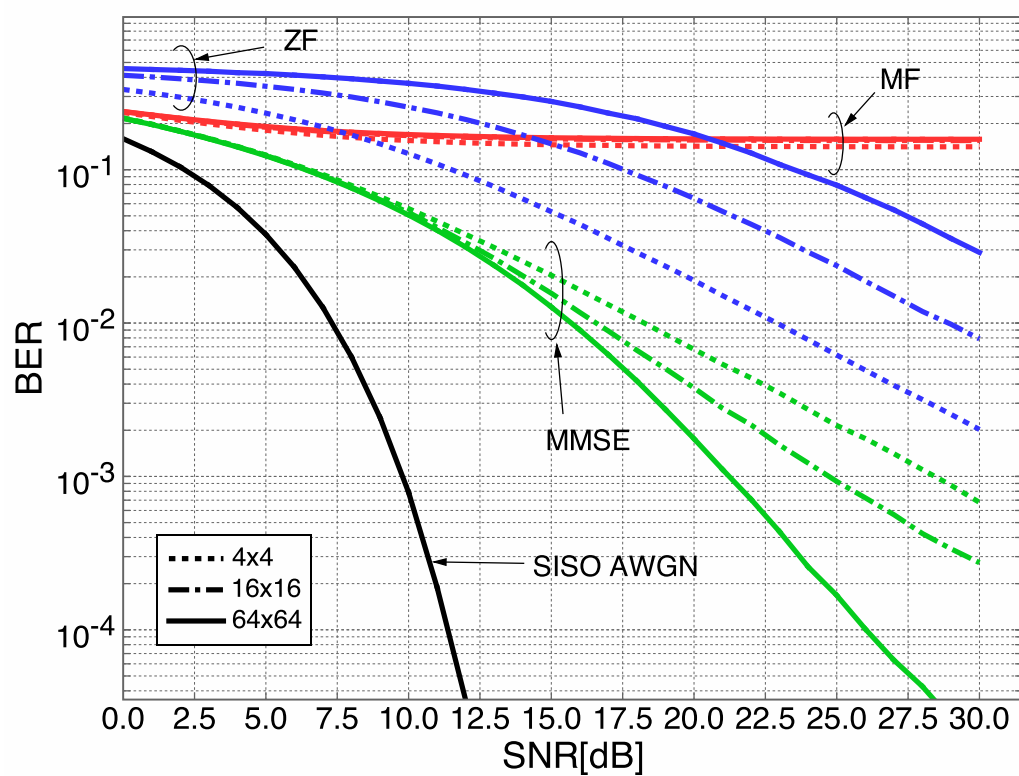


図 2.2: 空間フィルタリング各種の BER 特性

## 第3章 確率伝播法に基づく復調

第2章で説明したように、最尤検出に要する演算量は送信アンテナ数  $N_t$  と変調多値数  $M$  に対し  $N_t^M$  であり、送信アンテナ数  $N_t$  と変調多値数  $M$  の増加に伴い、その演算量は莫大になる。一方空間フィルタリングは、アンテナ数の増加に伴う性能劣化や、大規模 MIMO における演算量の問題がある。そこでアンテナ数を増やしても効率的に周辺事後確率を計算することができる確率伝播アルゴリズムに基づく繰り返し復調法が注目されている。

MIMO システムにおけるシンボル単位 MAP (Maximum A posteriori) 復調では、

$$\hat{x}_k = \operatorname{argmax}_{x_k} p(x_k | \mathbf{y}) \quad (3.1)$$

となる推定信号候補  $\hat{x}_k$  を出力することになる。ベイズの定理より

$$p(\hat{x}_k | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \hat{x}_k) p(\hat{x}_k)}{p(\mathbf{y})} \quad (3.2)$$

という関係が成り立ち、 $p(\hat{x}_k)$ ,  $p(\mathbf{y})$  がそれぞれ等確率であるときには

$$p(\hat{x}_k | \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} | \hat{x}_k) \quad (3.3)$$

であるので、シンボル単位 MAP 復調は  $p(\mathbf{y} | \hat{x}_k)$  を最大化する  $\hat{x}_k$  を求める問題とみなすことができる。しかし  $p(\mathbf{y} | \hat{x}_k)$  を求めるためには  $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  に対して

$$p(\mathbf{y} | \hat{x}_k) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x_k} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

という周辺化計算を行う必要がある。この周辺化計算には MLD と同等の演算量を要するので実際にこの手法で復調を行うことはできない。そこで、この周辺化計算を効率よく行うことができる確率伝播アルゴリズムについて説明していく。

### 3.1 確率伝播法

本節では [12] で述べられている、確率伝播アルゴリズムについて述べる。確率伝播アルゴリズムは木構造を持つファクターグラフ上で表現された多変数関数

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.5)$$

$$= f_1(A_1) f_2(A_2) \cdots f_m(A_m) \quad (3.6)$$

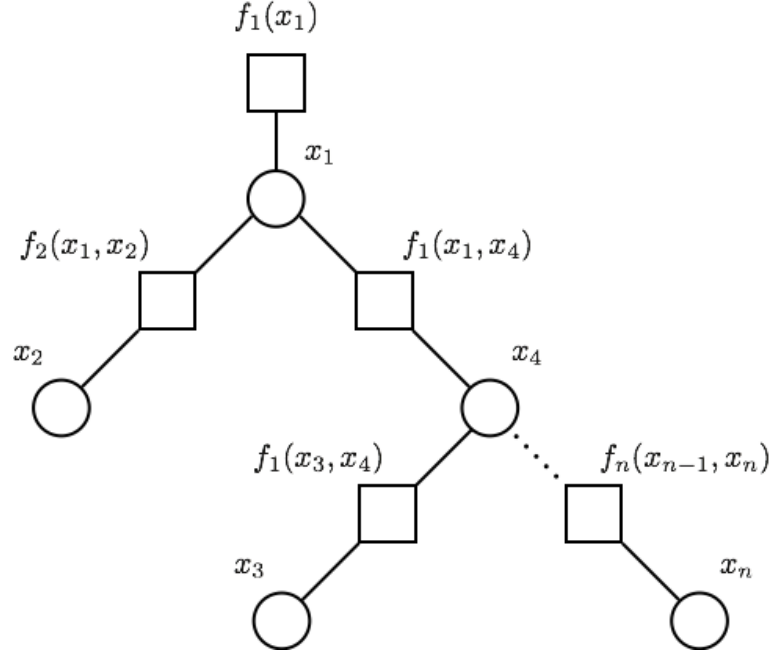


図 3.1: 木構造を持つファクターグラフ

の周辺化関数

$$g_i(x_i) = \sum_{X \setminus x_i} f(X) \quad (3.7)$$

をファクターグラフ上で効率的に計算するアルゴリズムである。ただし、 $A_1, A_2, \dots, A_m$  は  $X$  の部分集合である。このファクターグラフにおいて求めたい周辺化関数を  $g_r(x_r)$  とした時、変数ノード  $x_r$  を頂点として一番下の変数ノードから順に以下で説明する計算を行うことで周辺化関数を  $g_r(x_r)$  を求めることができる。まず変数ノード  $x_k$  から関数ノード  $f_i$  へ送るメッセージ  $M_{x_k, f_i}(x_k)$  は

$$M_{x_k, f_i}(x_k) = \prod_{a \in N(x_k) \setminus f_i} M_{a, x_k}(x_k) \quad (3.8)$$

として計算される。ただし  $N(x_k)$  は変数ノード  $x_k$  に接続されたノードの集合であり、 $M_{a, x_k}(x_k)$  はノード  $a$  から  $x_k$  に届いたメッセージを表す。また、 $x_k$  が葉であれば

$$M_{x_k, f_i}(x_k) = 1 \quad (3.9)$$

となる。そして関数ノード  $f_i$  から変数ノード  $x_k$  へ送られるメッセージは

$$M_{f_i, x_k}(x_k) = \sum_{A_i \setminus x_k} f_i(A_i) \prod_{A_i \setminus x_k} M_{a, f_i}(a) \quad (3.10)$$

として計算される．また， $f_i$  が葉であれば

$$M_{f_i, x_k}(x_k) = f_i(x_k) \quad (3.11)$$

となる．最後にルートノード  $x_r$  で

$$M_{x_r}(x_r) = \prod_{a \in N(x_r)} M_{a, x_r}(x_r) = g_r(x_r) \quad (3.12)$$

という計算をすることで周辺化関数  $g_r(x_r)$  を得る．グラフにループが存在しない場合は上記の周辺化計算を正しく行うことができるが，グラフにループが存在する場合には正しく周辺化計算を行えないことが知られている．

### 3.1.1 確率伝播法に基づく繰り返し復調

図 3.2 に式 (2.4) により定義される MIMO システムのファクターグラフ表現を示す．変数ノードは送信信号  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{N_t}]^T$  に対応し，観測ノードは受信信号  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{N_r}]^T$  に対応している．また BPSK 変調であるので，各送信信号の取りうる候補点集合は  $\mathcal{X} = \{+1, -1\}$  と表される．このとき全送信信号系列は順序付き集合  $\mathcal{X}^{N_t}$  で与えられ， $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^{N_t}$  である．ここで  $\mathcal{X}_j^b$  は  $\mathcal{X}^{N_t}$  の順序付きの部分集合を表し，その  $j$  番目の要素は  $b \in \mathcal{X}$  である．

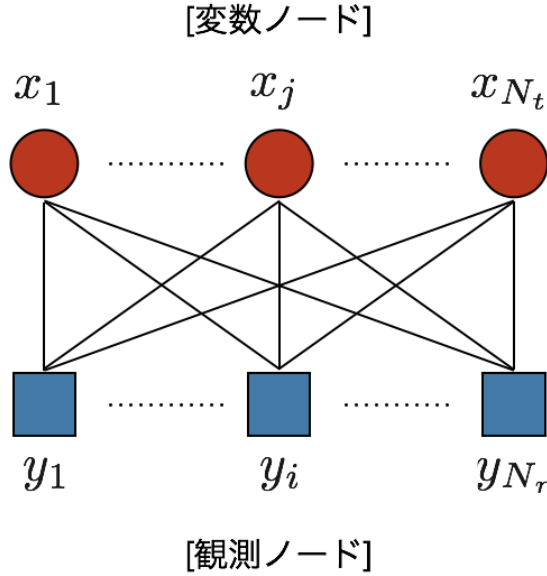


図 3.2: 通信路行列  $\mathbf{H}$  によって定義されるファクターグラフ．丸は変数ノードを意味し， $N_t$  個の送信信号に対応している．四角は観測ノードを意味し， $N_r$  個の受信信号に対応している

BP 法では，2 種類のメッセージが変数ノードと観測ノードの間で繰り返し交換される． $j$  番目の変数ノードから  $i$  番目の観測ノードへのメッセージは事前値と呼ばれ， $m_{j \rightarrow i} \triangleq p(x_j = +1)$  で



表される。また、 $i$  番目の観測ノードから  $j$  番目の変数ノードへのメッセージは対数尤度比 (LLR: Log Likelihood Ratio) と呼ばれ、

$$m_{i \rightarrow j} \triangleq \log \left( \frac{p(y_i | x_j = +1)}{p(y_i | x_j = -1)} \right),$$

で与えられる。

$j$  番目の変数ノードにおいて、 $m_{j \rightarrow i}$  は  $i$  番目の観測ノードを除く観測ノードからのメッセージを用いて、

$$m_{j \rightarrow i} = \frac{\exp(\sum_{k \in \mathcal{K} \setminus i} m_{k \rightarrow j})}{1 + \exp(\sum_{k \in \mathcal{K} \setminus i} m_{k \rightarrow j})}, \quad (3.13)$$

と計算され、 $i$  番目の観測ノードでは、 $m_{i \rightarrow j}$  は

$$m_{i \rightarrow j} = \log \left( \frac{\sum_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_j^{+1}} p(\hat{\mathbf{x}}) p(y_i | \hat{\mathbf{x}})}{\sum_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_j^{-1}} p(\hat{\mathbf{x}}) p(y_i | \hat{\mathbf{x}})} \right) \quad (3.14)$$

で計算される。

BP 法では、ダンピングと呼ばれる制振処理を行うことでメッセージの収束特性が向上することが知られている。本研究では LLR のみに対してメッセージダンピングを行い、ダンピング係数を  $\alpha$ 、 $t$  回目の繰り返しにおけるメッセージを  $m_{i \rightarrow j}^{(t)}$  とした時、以下の式でメッセージダンピングが行われる。

$$m_{i \rightarrow j}^{(t)} = (1 - \alpha) m_{i \rightarrow j}^{(t-1)} + \alpha m_{i \rightarrow j}^{(t)} \quad (3.15)$$

十分にメッセージ交換を繰り返した後、 $j$  番目の送信信号の推定値  $\hat{x}_j$  は以下のように与えられる。

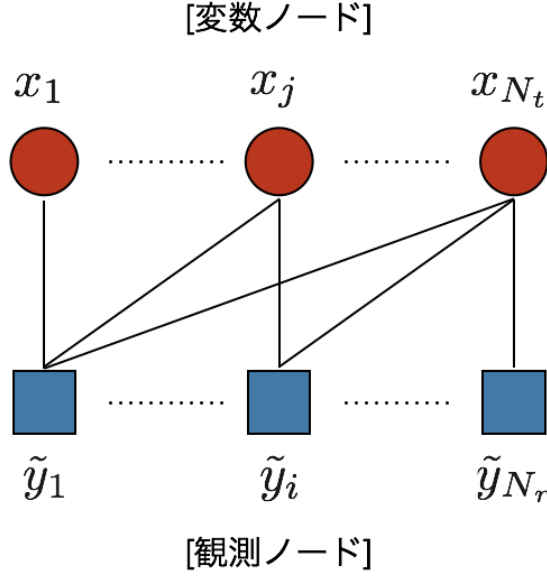
$$\hat{x}_j = \tanh \left( \frac{\sum_k m_{k \rightarrow j}}{2} \right) \quad (3.16)$$

BP 法はファクターグラフにループが存在しない場合には正確に周辺事後確率を計算することができる。しかし、図 3.2 から明らかなように、MIMO システムのファクターグラフは全ノードが互いに結合しているため、多数のショートループを含み、MLD の特性から大きく乖離してしまう。そこで、ショートループの影響を緩和させる QR-BP 法について次節で述べる。

### 3.1.2 QR 分解付き確率伝播法

QR 分解を通信路行列  $\mathbf{H}$  に適用することで、式 (2.4) は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (3.17)$$


 図 3.3: QR 分解後の等価通信路行列  $\mathbf{R}$  によって定義されるファクターグラフ

ここで  $\mathbf{Q}$  はユニタリ行列,  $\mathbf{R}$  は上三角行列である. さらに式 (3.17) に対して左から  $\mathbf{Q}^T$  を乗算することで, 受信信号を以下のように変換することができる.

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{z}} \quad (3.18)$$

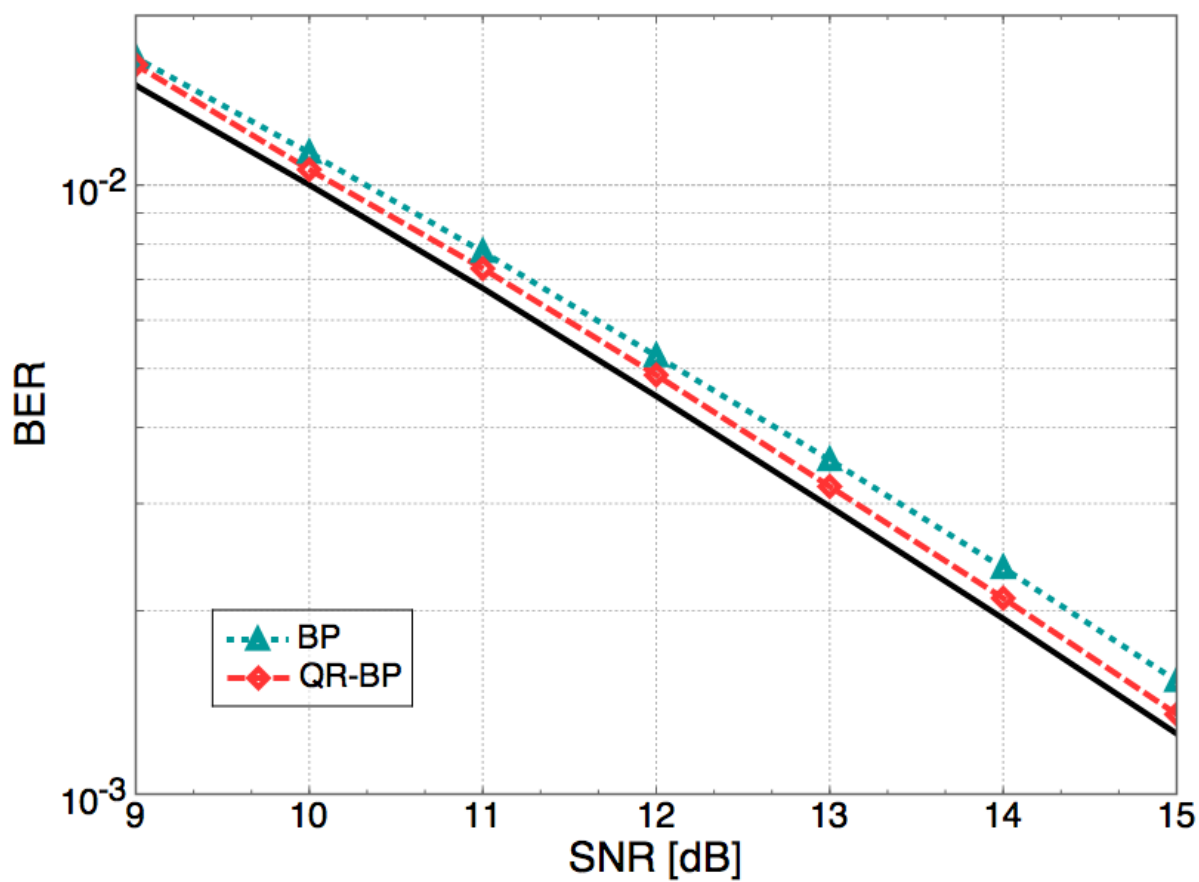
ただし  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y} = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{2N_r}]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{z} = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2N_r}]^T$  であり,  $\tilde{\mathbf{z}}$  の各要素は互いに統計的に独立なガウス変数であり, 平均は 0, 分散は  $N_0/2$  である. 式 (3.18) によって定義されるファクターグラフを図 3.3 に示す. QR-BP 法に対応するグラフは BP 法に比べてループが少なくなっているものの, 依然としてループを含む. ループの数はアンテナ数が増えるほど増加するため, QR-BP 法も BP 法と同様に MLD の特性からは乖離してしまう.

### 3.1.3 数値例

図 3.4 と図 3.5 に  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時と  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時の BP 法と QR-BP 法の BER 特性を比較した図を示す. なお図 3.5 には LLR に対してメッセージダンピングを行なった結果も合わせて示してある.

図 3.4 では BP 法と QR-BP 法は共に MLD に漸近する特性を示しているが, BP 法のファクターグラフの方が QR-BP 法の方のファクターグラフに対して多くショートループ含むため, QR-BP 法の方が優れた特性を示している. しかし MLD とは若干の特性差があり, これは QR 分解後の通信路行列から得られたファクターグラフにもショートループが含まれているからである.

図 3.5 では BP 法の BER 特性は MLD と比較して大幅に劣化している. これはアンテナ数が増えたことでファクターグラフ内のショートループが増加したからである. QR 分解後のファクター

図 3.4:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の BP 法と QR-BP 法の BER の比較

グラフ内のショートループの数も同様に増加するため、QR-BP 法の特性能も高 SNR 領域において MLD の特性から乖離している。また BP 法と QR-BP 法共にダンピングによって若干の特性改善が見られるが、ショートループによる性能劣化を抑えることはできていない。

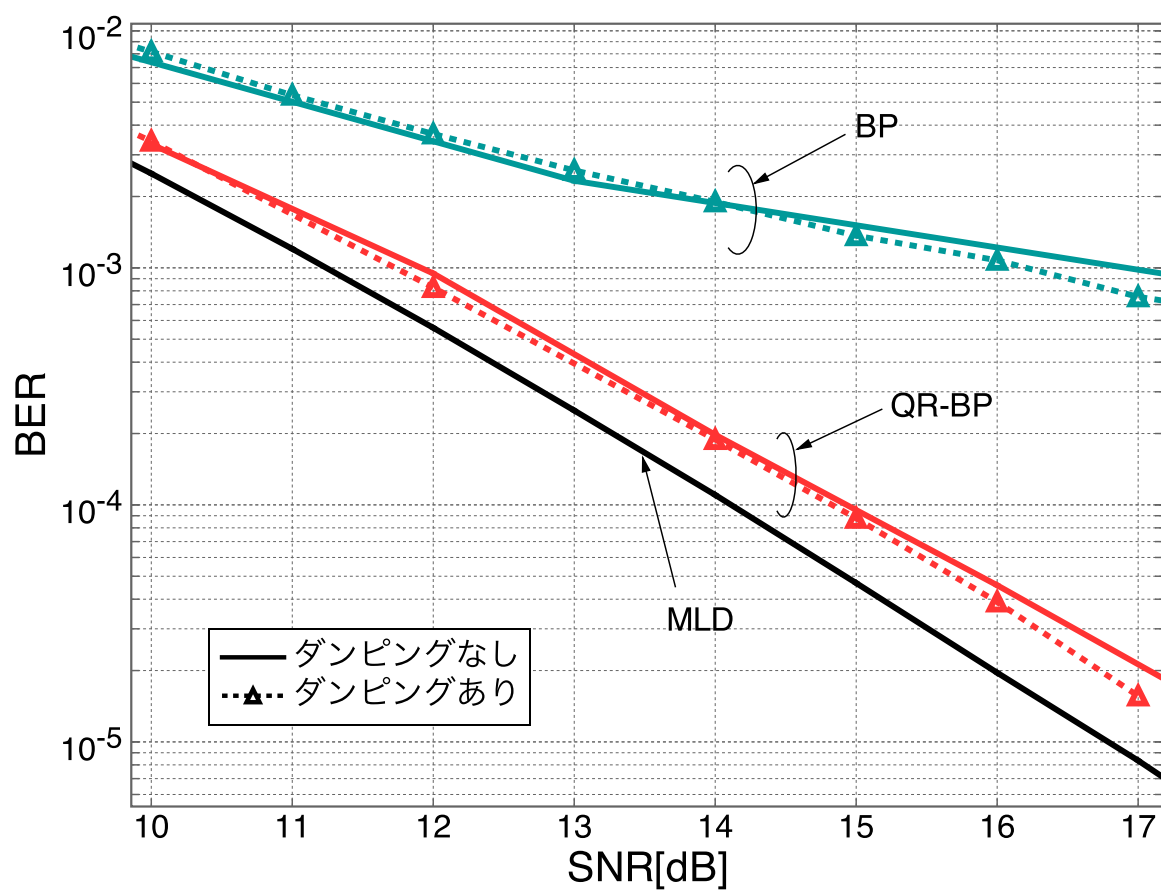


図 3.5:  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時の BP 法と QR-BP 法の BER の比較

## 第4章 提案手法

BP 法および QR-BP 法は、真の確率分布と試行関数としての確率分布とのカルバックライブラ情報量の最小化問題とみなすことができ、真の確率分布は各変数ノードの確率へと因数分解可能であると仮定している [3]。一方、一般化確率伝播 (GBP: Generalized Belief Propagation) 法ではこの仮定を緩和し、複数の変数ノードを含んだ結合確率のまま計算を行うことで、ループのあるグラフに対する周辺分布の計算を可能としている。GBP 法は、統計力学におけるクラスタ変分法 [13] と本質的に同一であり、領域グラフ上の自由エネルギーの最小化を目指して繰り返し計算を行うアルゴリズムである。このため GBP 法の計算精度は構成された領域グラフの性質に依存する [3]。

GBP 法における領域グラフはファクターグラフ上のいくつかの変数ノードおよび観測ノードをまとめ上げることで構築される。図 3.2 に示したような全てのノードが互いに結合したファクターグラフから構築された領域グラフ上では、GBP 法の計算は MLD と一致するため同様に演算量の増大が問題となる。

本章では提案手法である、通信路行列に QR 分解を用いることで変形されたファクターグラフから構築される領域グラフ上で GBP 法アルゴリズムを用いる、QR 分解付き一般化確率伝播 (QR-GBP: QR-decomposed GBP) 法 [7] について説明する。

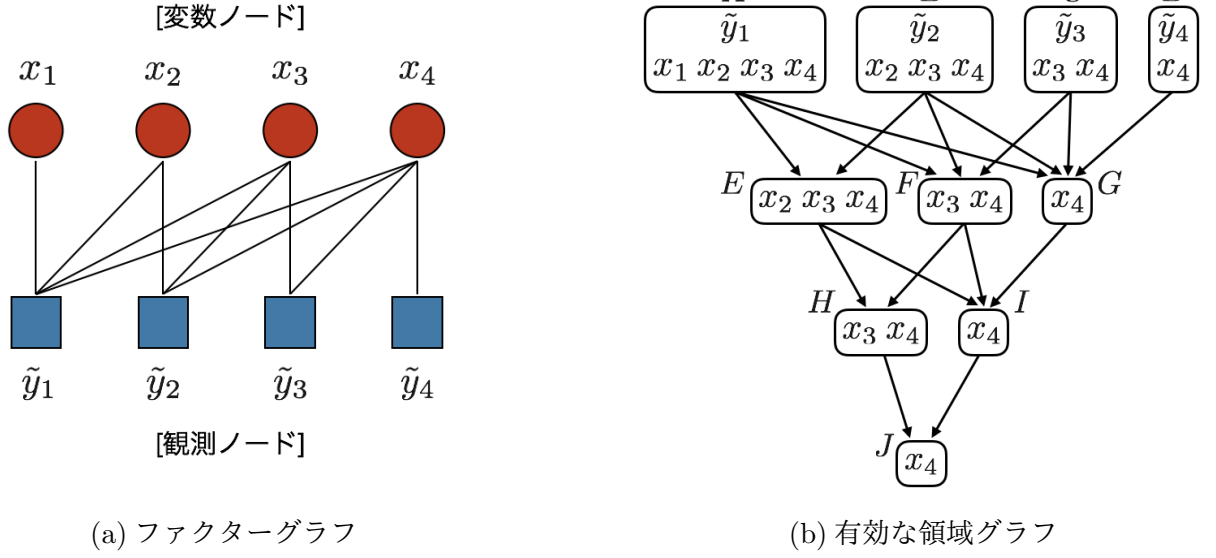
### 4.1 QR 分解付き一般化確率伝播法に基づく復調

以降では QR 分解後のファクターグラフから領域グラフを構築する方法について説明する。説明の簡単のため、以降では  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  を仮定する。このとき QR 分解後のファクターグラフは図 4.1(a) のように与えられる。

まず領域を以下のように定義する。領域とはファクターグラフ上のいくつかの変数ノードと観測ノードからなる集合であり、ある領域が観測ノードを含む場合、隣接する全ての変数ノードも同一領域に含まれる。図 4.1(a) のファクターグラフより与えられる領域グラフは図 4.1(b) のようになり、最上段の領域は、一つの観測ノードとそれに隣接する全ての変数ノードを含み、他の全ての領域は自身の全ての親領域に共通する変数ノードを含む。以降ではある領域  $v_a$  から  $v_d$  への有向パスがある場合  $v_a$  は  $v_d$  の先祖と呼び、 $v_d$  は  $v_a$  の子孫と呼ぶ。

領域グラフはこの構築の仕方に従って任意の構造をとることが可能だが、GBP 法が正しく周辺分布を計算するためには、領域計数 (counting number)、エントロピーの最大化という 2 つの条件を領域グラフが満たしている必要がある。これらの条件については次節で述べる。

本稿では最も一般的な GBP 法アルゴリズムの 1 つである parent-to-child アルゴリズム [3] を用


 図 4.1:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の QR 分解後のファクターグラフから構築された有効な領域グラフ

いる．このとき各領域  $R$  は以下の式で与えられる主観確率  $b_R(\mathbf{x}_R)$  を持つ．

$$b_R(\mathbf{x}_R) \propto p(\tilde{y}_R | \mathbf{x}_R) \left( \prod_{P \in \mathcal{P}(R)} m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R) \right) \times \left( \prod_{D \in \mathcal{D}(R)} \prod_{P' \in \mathcal{P}(D) \setminus \varepsilon(R)} m_{P' \rightarrow D}(\mathbf{x}_D) \right) \quad (4.1)$$

ここで  $m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R)$  は、領域  $P$  から領域  $R$  へ渡されるメッセージである．また、 $\mathcal{P}(R)$  は領域  $R$  の全ての親領域の集合であり、 $\mathcal{D}(R)$  は領域  $R$  の全ての子孫領域の集合であり、 $\varepsilon(R) \equiv R \cup \mathcal{D}(R)$  は領域  $R$  の全ての子孫領域と領域  $R$  自身の集合を表す．主観確率は真の周辺確率と同様に以下の条件を満たしている必要がある．

$$\sum_{\mathbf{x}_R} b_R(\mathbf{x}_R) = 1 \quad (4.2)$$

$$b_R(\mathbf{x}_R) = \sum_{\mathbf{x}_P \setminus \mathbf{x}_R} b_P(\mathbf{x}_P) \quad (4.3)$$

式 (4.3) に式 (4.1) を代入することで、 $t$  回目の繰り返しにおけるメッセージは、以下の更新式によって与えられる．

$$m_{P \rightarrow R}^{(t)}(\mathbf{x}_R) := \sum_{\mathbf{x}_P \setminus \mathbf{x}_R} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) \frac{\prod_{(I, J) \in N(P, R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)}{\prod_{(I, J) \in D(P, R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)} \quad (4.4)$$

ここで  $N(P, R)$  は、すべての枝で接続された領域ペア  $(I, J)$  のうち、 $\varepsilon(P)$  に含まれるが  $\varepsilon(R)$  には含まれない領域  $J$  と、 $\varepsilon(P)$  に含まれない領域  $I$  の組み合わせ  $(I, J)$  を意味し、 $D(P, R)$  は、すべ

での枝で接続された領域ペア  $(I, J)$  のうち,  $\varepsilon(R)$  に含まれる領域  $J$  と,  $D(P)$  に含まれるが  $\varepsilon(R)$  には含まれない領域  $J$  の組み合わせ  $(I, J)$  を意味する.

領域グラフが木構造である場合, GBP 法の収束点は真の周辺分布と一致する. 一方領域グラフがループを持つ場合には近似計算となり復調特性が劣化する. BP 法と同様に GBP 法においてもメッセージダンピングを行うことが推奨される [3]. ダンピング係数が  $\alpha$  で与えられるとき, メッセージダンピングは以下の式で与えられる.

$$m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R) = (\alpha - 1)m_{P \rightarrow R}^{(t)}(\mathbf{x}_R) + \alpha m_{P \rightarrow R}^{(t-1)}(\mathbf{x}_R) \quad (4.5)$$

十分なメッセージ更新後, 各変数について最小の領域における主観確率を周辺化することで, 以下のように各変数の周辺事後確率が計算される.

$$p(x_1|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_1} \sum_{x_2, x_3, x_4} b_A(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (4.6)$$

$$p(x_2|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_2} \sum_{x_3, x_4} b_E(x_2, x_3, x_4) \quad (4.7)$$

$$p(x_3|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_3} \sum_{x_4} b_H(x_3, x_4) \quad (4.8)$$

$$p(x_4|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_4} b_J(x_4) \quad (4.9)$$

この時,  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  はそれぞれ, 主観確率を結合確率へ正規化する際の正規化定数である.

#### 4.1.1 領域グラフが満たすべき条件

本節では, 正しく周辺事後確率を計算するために領域グラフが満たさなければならない条件である, 領域計数とエントロピーの最大化について述べる.

領域グラフ上には同じ変数複数存在しており, その重複を考慮してメッセージ更新を行うために必要な条件が領域計数の条件である. まず, 全ての領域  $v$  に対して領域計数  $c_v$  を

$$c_v = 1 - \sum_{R \in A(v)} c_R \quad (4.10)$$

と定義する.  $A(v)$  は領域  $v$  の全ての先祖領域の集合を意味する. 領域グラフ上の全領域の領域計数の総和が,

$$\sum_R c_R = 1 \quad (4.11)$$

を満たす必要がある. この領域計数の条件を満たしていれば領域グラフ上での変数の重複を考慮して復調を行うことが可能である.

また、領域グラフ上の各領域  $R$  においてエントロピー  $H(b_R)$  は以下のように計算される。

$$H(b_R) = - \sum_{\mathbf{x}_R} b_R(\mathbf{x}_R) \ln b_R(\mathbf{x}_R) \quad (4.12)$$

ここで、 $\mathbf{x}_R$  は領域  $R$  に含まれる送信信号系列である。この時領域グラフ全体のエントロピー  $H_{\text{RG}}$  は以下の式で与えられる。

$$H_{\text{RG}} = \sum_R c_R H(b_R) \quad (4.13)$$

この領域グラフ全体のエントロピーが  $\mathbf{x}$  が一様分布に従う時に最大化されていなければならないというのがエントロピー最大化の条件である。

これらの条件を満たした領域グラフは有効な領域グラフと呼ばれ、GBP 法アルゴリズムによって正しく周辺事後確率を計算することができる。

図 4.1(b) に示した領域グラフの領域計数は

$$\begin{aligned} \sum_R c_R &= c_A + c_B + c_C + c_D + c_E + c_F + c_G + c_H + c_I + c_J \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + (-1) + (-2) + (-3) + 1 + 3 + (-1) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

と計算され、領域計数の条件を満たしていることが確認できる。

また、図 4.1(b) の領域グラフ全体のエントロピー  $H_{\text{RG}}$  は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} H_{\text{RG}} &= H(b_A) + H(b_B) + H(b_C) + H(b_D) \\ &\quad - H(b_E) - 2H(b_F) - 3H(b_G) + H(b_H) + 3H(b_I) - H(b_J) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\mathbf{x}$  が一様分布に従う時、

$$H(b_B) = H(b_E) \quad (4.16)$$

$$H(b_C) = H(b_F) = H(b_H) \quad (4.17)$$

$$H(b_D) = H(b_G) = H(b_I) = H(b_J) \quad (4.18)$$

となるため (4.19) 式は、

$$H_{\text{RG}} = H(b_A) \quad (4.19)$$

となり、 $H(b_A)$  は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$  が一様分布に従うとき明らかに最大化されるため、図 4.1(b) の領域グラフはエントロピー最大化の条件も満たすことが確認できた。よって以降では図 4.1(b) の領域グラフを有効な領域グラフと呼ぶ。



### 4.1.2 打ち切り領域グラフ

ここで、領域計数及びエントロピー最大化の条件を満たさない領域グラフの一例として図 4.2 に示す打ち切り領域グラフについて説明する。

打ち切り領域グラフにおいて、各領域  $R'$  の領域計数の総和は以下のように与えられ、

$$\sum_{R'} c_{R'} = c_{A'} + c_{B'} + c_{C'} + c_{D'} + c_{E'} + c_{F'} + c_{G'} = -2 \quad (4.20)$$

領域計数の条件を満たさないことがわかる。このとき領域グラフ内の変数の重複が考慮されないため、正しく復調が行われない。

打ち切り領域グラフ全体のエントロピーは以下の式で与えられ、

$$H'_{\text{RG}} = H(b'_A) + H(b'_B) + H(b'_C) + H(b'_D) - H(b'_E) - 2H(b'_F) - 3H(b'_G) \quad (4.21)$$

$\mathbf{x}$  が一様分布に従う時、(5.28), (5.29), (5.30) 式より

$$H'_{\text{RG}} = H(b'_A) - H(b'_C) - 2H(b'_D) \quad (4.22)$$

と計算され、必ずしも最大化されないことがわかる。

図 4.3 に、図 4.1(b) と図 4.2 それぞれの領域グラフにおいて、 $\mathbf{x}_R$  の分布に試行毎に偏りを持った分布を与えた時の領域グラフ全体のエントロピーと、一様分布とした時の領域グラフ全体のエントロピーを比較を示す。図 4.3 からわかるように、打ち切り領域グラフにおいては与えられた分布によって、領域グラフ全体のエントロピーが最大化されないことがある。そのため、図 4.3 の領域グラフは有効な領域グラフではないことがわかる。

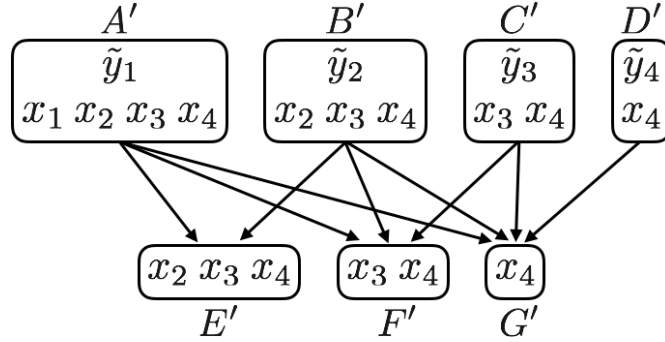


図 4.2:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の QR 分解後のファクターグラフから構築された打ち切り領域グラフ

### 4.1.3 対数領域 QR 分解付き確率的一般化確率伝播法

式 (4.4) で与えられるメッセージ更新式では、更新に用いる全てのメッセージを乗算することになる。このため繰り返し更新を行った際に数値的に不安定となることが予想され、実用上問題と

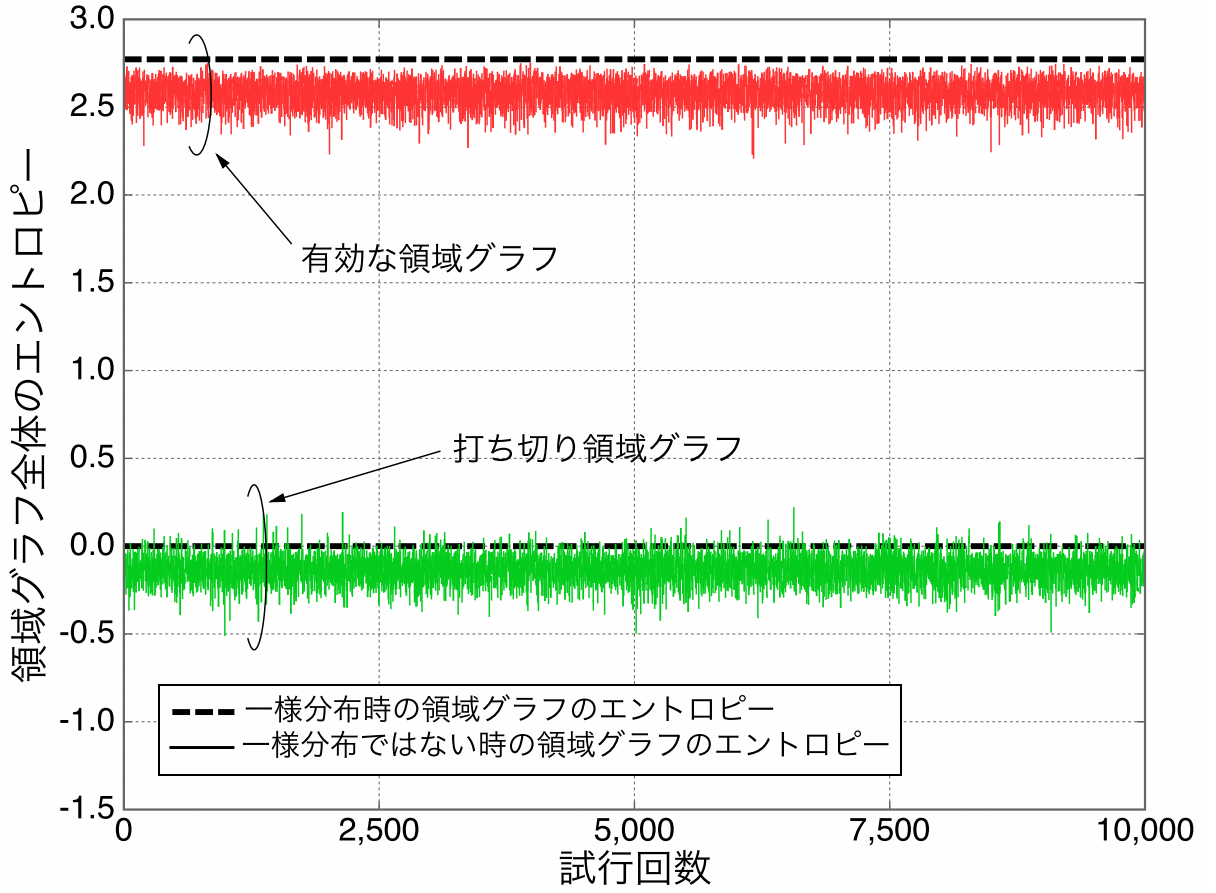


図 4.3: 一様分布時の領域グラフ全体のエントロピーと一様分布ではない時の領域グラフ全体のエントロピーの比較

なる．そこで，数値計算上の安定化を実現する対数領域 QR-GBP 法を提案する．まず式 (4.4) に対して，両辺対数を取り，以下の式を得る．

$$\log \left[ m_{P \rightarrow R}^{(t)}(\mathbf{x}_R) \right] := \log \left[ \sum_{\mathbf{x}_P \setminus \mathbf{x}_R} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) \frac{\prod_{(I,J) \in N(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)}{\prod_{(I,J) \in D(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)} \right] \quad (4.23)$$

このとき，右辺の周辺化計算では，対数領域から確率領域に戻して計算処理を行わなければならない，計算の不安定性を招く．そこで，以下の式で与えられるヤコビアン対数 (Jacobian Logarithm) を用いる．

$$\log(e^{\delta_1} + e^{\delta_2}) = \max\{\delta_1, \delta_2\} + \log\{1 + e^{-|\delta_1 - \delta_2|}\} \quad (4.24)$$

これを再帰的に用いることで，以下のように対数領域のまま計算することが可能である．

$$\begin{aligned} \log(e^{\delta_1} + \dots + e^{\delta_n}) &= \log(\Delta + e^{\delta_n}) \\ &= \max\{\delta, \delta_n\} + \log\{1 + e^{-|\delta - \delta_n|}\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし  $\Delta = e^{\delta_1} + \dots + e^{\delta_{n-1}} = e^{\delta}$  である,

## 4.2 数値例

ここで, QR-GBP 法の BER 特性をコンピュータシミュレーションにより評価する. 図 4.4, 4.5 に従来手法である MMSE 法, BP 法, QR-BP 法, MLD および提案手法である QR-GBP 法の BER 特性を示す. 送受信アンテナ数はそれぞれ 4 本と 8 本であり, 繰返し回数はそれぞれ 5 回, 8 回である. 図 4.4 より, BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法は全て MLD に近い特性が得られていることが確認できる. これはファクターグラフの規模が極端に小さいために, ショートループの影響が大きく現れなかったからである.

一方送受信アンテナ数を 8 本にした場合は, 図 4.5 から分かるように, BP 法は高い領域でエラーフロアを引いている. QR-BP 法は高 SNR 領域において性能が劣化し MLD との乖離が見られる. 一方 QR-GBP 法は, MLD に漸近する性能が得られていることが確認できる. このことから, GBP 法によりファクターグラフにショートループが存在する場合にも正しく事後確率が計算できることが確認できた.

また, 打ち切り領域グラフを用いた QR-GBP 法の結果に着目すると, 領域計数の条件とエントロピー最大化の条件を満たしていないため, QR-GBP 法との間に特性差が生じている. しかし図 4.4 では QR-BP 法より優れた特性を示しており, 図 4.5 では QR-BP 法がショートループの影響で高 SNR 領域において MLD の性能から乖離していくのに対して, 一 GBP 法を用いたことでショートループによる特性劣化を抑えることができていたことがわかる. このことから GBP 法がファクターグラフ上にショートループが存在していても正確に復調を行うことが可能な手法であると言える.

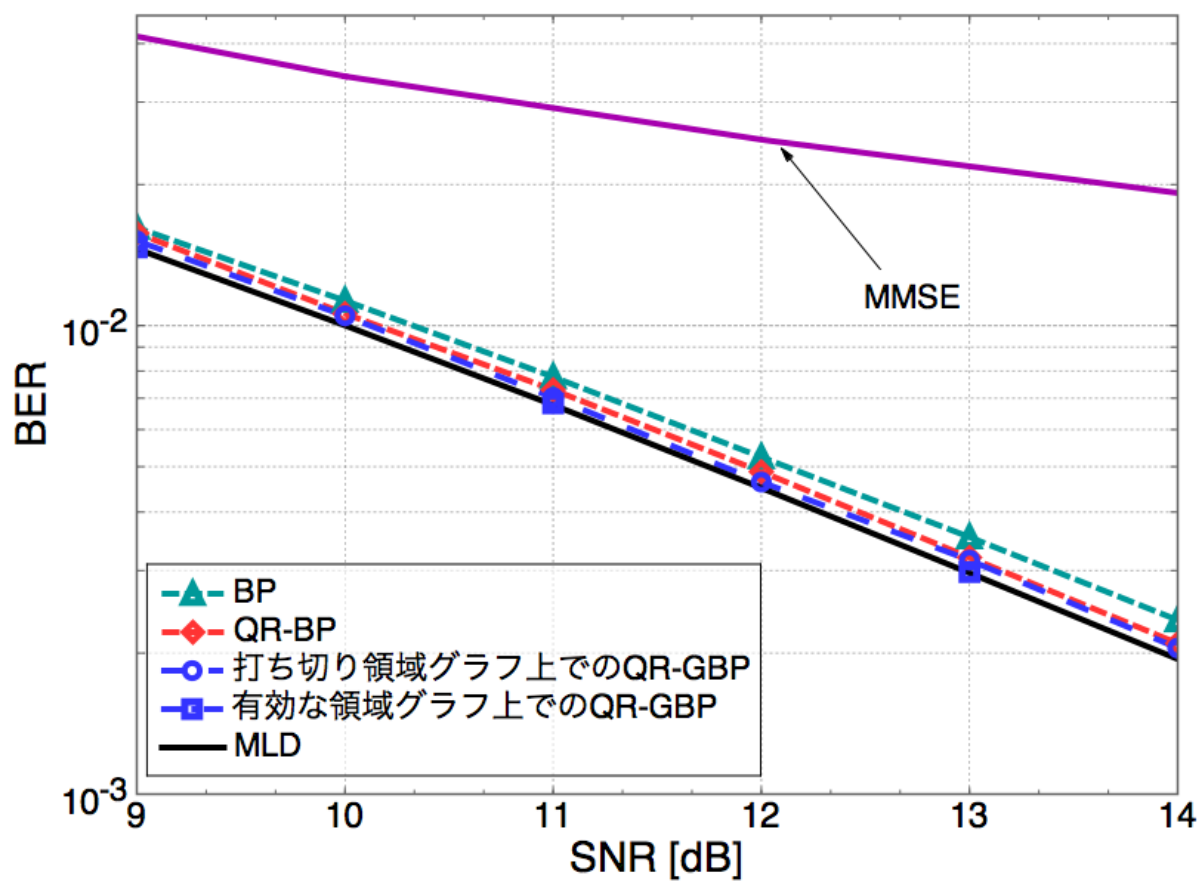


図 4.4:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法の BER 特性

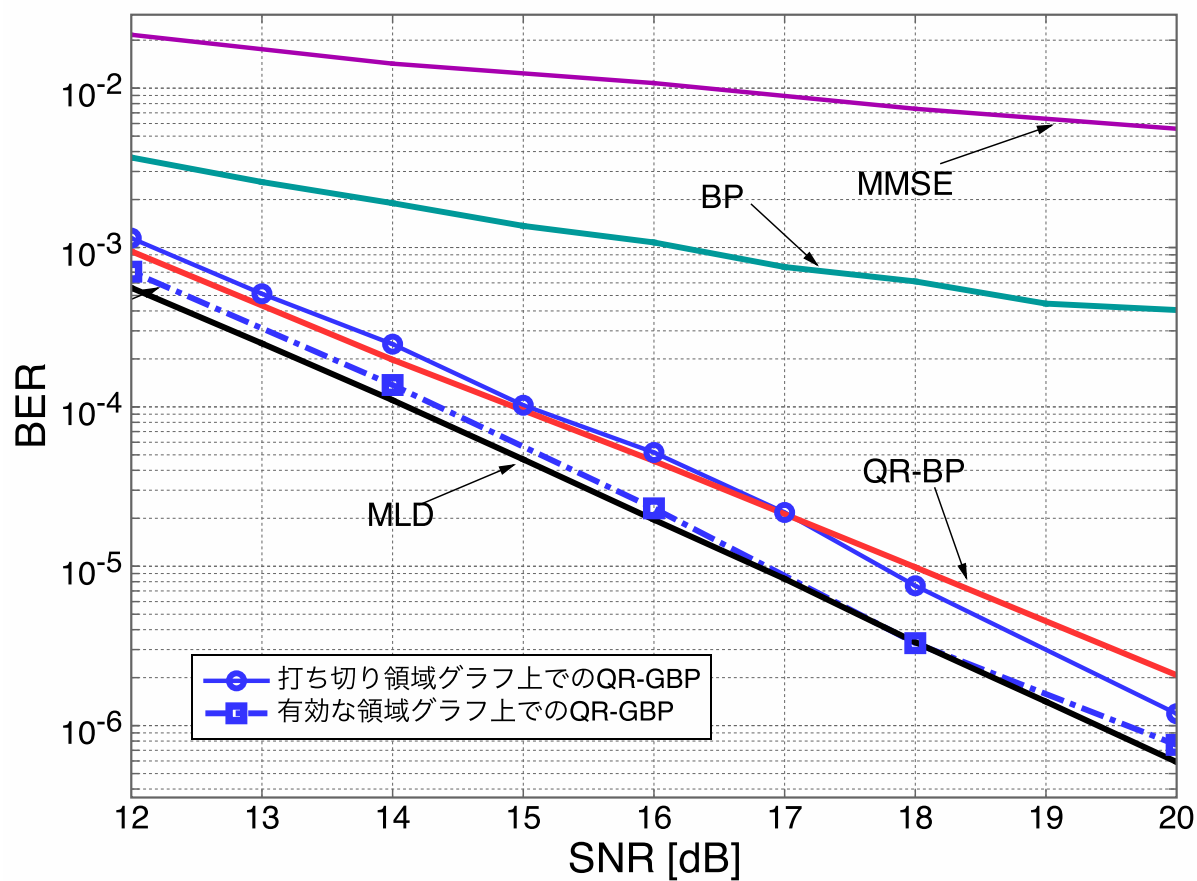


図 4.5:  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法の BER 特性

## 第5章 QR-GBP 法の演算量低減手法

本章では、提案手法である QR-GBP 法の演算量低減手法として、QR 分解付き確率的一般化確率伝播 (QR-SGBP: QR-Stochastic GBP) 法, SMR (Smart Message Reduction) 付き QR-GBP 法, エッジ削減 QR-GBP (ER-QR-GBP: Edge Reduced QR-GBP) 法について述べ、演算量と BER 特性の評価を行う。QR-SGBP 法は、メッセージ更新に要する周辺化計算をモンテカルロ積分に置き換えることで演算量を低減する手法、SMR 付き QR-GBP 法は、QR 分解後の領域グラフの構造を利用して、メッセージ更新に用いるメッセージの数を効率的に削減する手法、そして ER-QR-GBP 法は、グラフ構造を変化させることで QR-GBP 法のメッセージ更新時の周辺化演算量を大幅に低減する手法である。

これらの提案手法について計算機シミュレーションから演算量を低減しつつ MLD に漸近する性能が得られることを示す。

### 5.1 QR 分解付き確率的一般化確率伝播法

式 (4.4) の右辺で与えられるメッセージ更新式に用いられる全てのメッセージを

$$M(\mathbf{x}_{T_{PR}}) = \frac{\prod_{(I,J) \in N(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)}{\prod_{(I,J) \in D(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)} \quad (5.1)$$

とおく。\$\mathbf{x}\_{T\_{PR}}\$ は式 (5.1) の右辺に現れる全ての変数を意味する。このとき、最大領域からその子領域へのメッセージ更新の際のみ、各最大領域が含む観測ノードの尤度が用いられる、しかし式 (4.4) における \$\mathbf{x}\_P\$ と (5.1) 式における \$\mathbf{x}\_{T\_{PR}}\$ は必ずしも等しくなく、\$\mathbf{x}\_{(P \setminus R) \cap T\_{PR}} \subset \mathbf{x}\_{(P \setminus R) \cap P}\$ という関係になることがある。そこで、\$\mathbf{x}\_{(P \setminus R) \cap T\_{PR}}\$ と \$\mathbf{x}\_{(P \setminus R) \setminus T\_{PR}}\$ に関する周辺化計算を分離することで、以下のように (4.4) 式を書き換えることができる。

$$\begin{aligned} m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R) &:= \sum_{\mathbf{x}_{P \setminus R}} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) M(\mathbf{x}_{T_{PR}}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \setminus T_{PR}}} \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) M(\mathbf{x}_{T_{PR}}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} M(\mathbf{x}_{T_{PR}}) \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \setminus T_{PR}}} \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) \frac{M(\mathbf{x}_{T_{PR}})}{\sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} M(\mathbf{x}_{T_{PR}})} \\ &= k_{PR}(\mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)}) \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \setminus T_{PR}}} \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) Q(\mathbf{x}_{T_{PR} \cap (P \setminus R)} | \mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)}) \quad (5.2) \end{aligned}$$

ここで,  $k_{PR}(\mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)})$  は

$$k_{PR}(\mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)}) = \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} M(\mathbf{x}_{T_{PR} \cap (P \setminus R)}, \mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)}) \quad (5.3)$$

として与えられ,

$$Q(\mathbf{x}_{T_{PR} \cap (P \setminus R)} | \mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)}) = \frac{M(\mathbf{x}_{T_{PR} \cap (P \setminus R)}, \mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)})}{\sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} M(\mathbf{x}_{T_{PR} \cap (P \setminus R)}, \mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)})} \quad (5.4)$$

は条件付きの確率分布とみなすことができる. このとき, 尤度  $p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P)$  の  $\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}$  に関する周辺化計算をモンテカルロ積分に置き換え,

$$m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R) = k_{PR}(\mathbf{x}_{T_{PR} \setminus (P \setminus R)}) \times \sum_{\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}}} \mathbf{E}_{[\mathbf{x}_{(P \setminus R) \cap T_{PR}} \sim Q]} [p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P)] \quad (5.5)$$

のようにメッセージ更新式を変形することができる. 上式のメッセージ更新を用いることで, 明らかに式 (4.4) における乗算を削減することができる.

例えば図 4.1(b) の領域 A から領域 F へのメッセージ更新は, 以下のように計算される.

$$\begin{aligned} m_{A \rightarrow F}(x_3, x_4) &= \sum_{x_1, x_2} p(\tilde{y}_1 | x_1, x_2, x_3, x_4) \hat{M}(x_2, x_3, x_4) \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} p(\tilde{y}_1 | x_1, x_2, x_3, x_4) \hat{M}(x_2, x_3, x_4) \\ &= \sum_{x_2} \hat{M}(x_2, x_3, x_4) \sum_{x_1} \sum_{x_2} p(\tilde{y}_1 | x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\hat{M}(x_2, x_3, x_4)}{\sum_{x_2} \hat{M}(x_2, x_3, x_4)} \\ &= k_{AF}(x_3, x_4) \sum_{x_1} \sum_{x_2} p(\tilde{y}_1 | x_1, x_2, x_3, x_4) Q(x_2 | x_3, x_4) \\ &= k_{AF}(x_3, x_4) \sum_{x_1} \mathbf{E}_{[x_2 \sim Q]} [p(\tilde{y}_1 | x_1, x_2, x_3, x_4)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

ただし,

$$\hat{M}(x_2, x_3, x_4) = \frac{m_{B \rightarrow E}(x_2, x_3, x_4) m_{B \rightarrow G}(x_4) m_{C \rightarrow G}(x_4) m_{D \rightarrow G}(x_4)}{m_{E \rightarrow H}(x_3, x_4) m_{E \rightarrow I}(x_4) m_{G \rightarrow I}(x_4)} \quad (5.7)$$

$$k_{AF}(x_3, x_4) = \sum_{x_2} \hat{M}(x_2, x_3, x_4) \quad (5.8)$$

$$Q(x_2 | x_3, x_4) = \frac{\hat{M}(x_2, x_3, x_4)}{\sum_{x_2} \hat{M}(x_2, x_3, x_4)} \quad (5.9)$$

である.

そして (5.5) 式に基づいた十分なメッセージ更新の後, (5.23) (5.20) 式に従って各変数について最小の領域における主観確率を周辺化することで, 以下のように各変数の周辺事後確率が計算される.

## 5.1.1 演算量の比較

図 5.1 は  $(N_t, N_r) = (4, 4), (8, 8)$  とし，モンテカルロ積分の回数  $M$  を  $M = 15$  とした時の変調多値数に対する QR-GBP 法と QR-SGBP 法の，繰り返し一回における全メッセージ更新に要する乗算回数を比較したものである．図より変調多値数が大きいときには QR-SGBP 法による演算量削減効果が大きいが変調多値数が小さい時には演算量の削減が見込めないことがわかる．

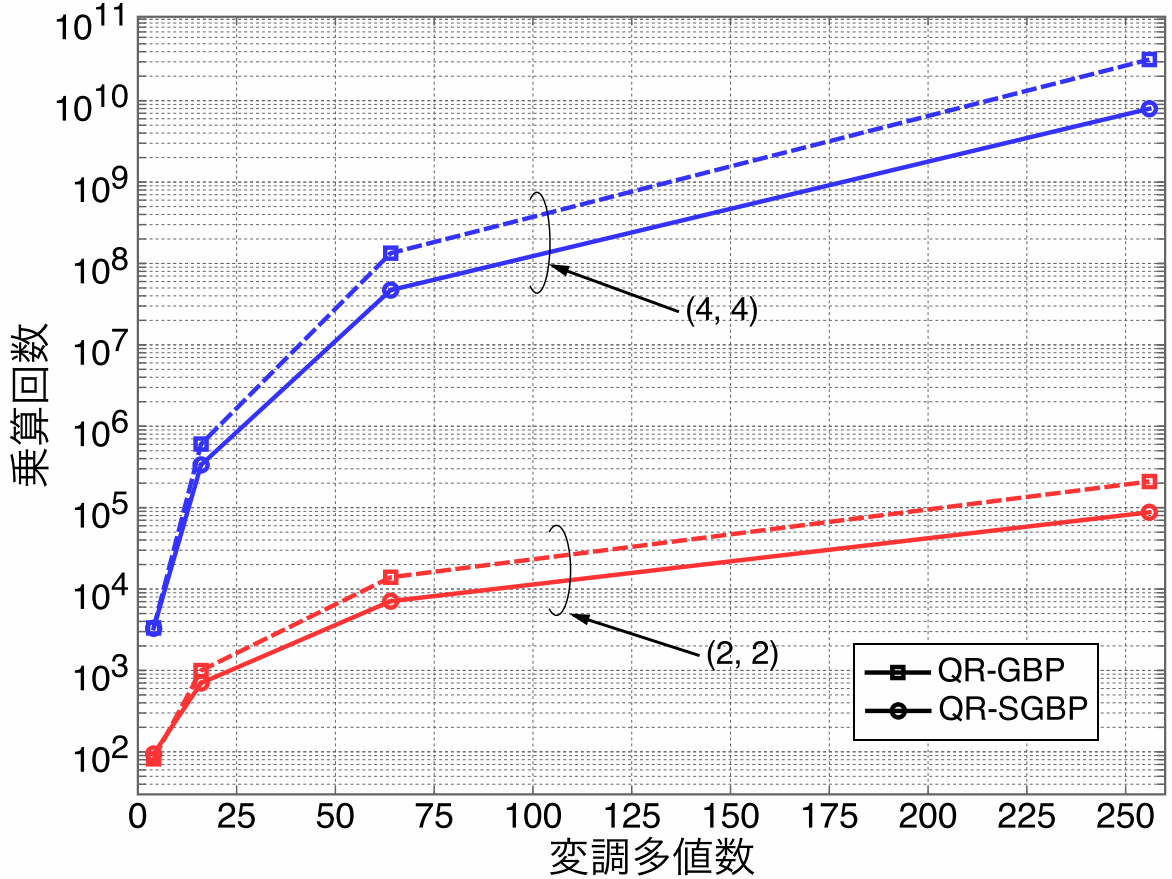


図 5.1:  $(N_t, N_r) = (2, 2), (4, 4)$  とした時の，SGBP 法と GBP 法の乗算回数の比較

## 5.1.2 数値例

図 5.2 は送受信アンテナ数を  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  とし，QR-SGBP 法のモンテカルロ積分の回数  $M$  を変化させた時の BER と，QR-GBP 法と MLD の BER 特性を比較したものである．QR-GBP 法と QR-SGBP 法ともに，繰り返し回数は 5 回，ダンピング係数は  $\alpha = 0.7$  とし，いずれも対数領域演算を行った．図より，QR-SGBP 法の特性はモンテカルロ積分の回数を増やすにつれて向上し，モンテカルロ積分の回数を 15 回とした時には QR-GBP 法と MLD にその BER 特性が漸近していることが確認できる．



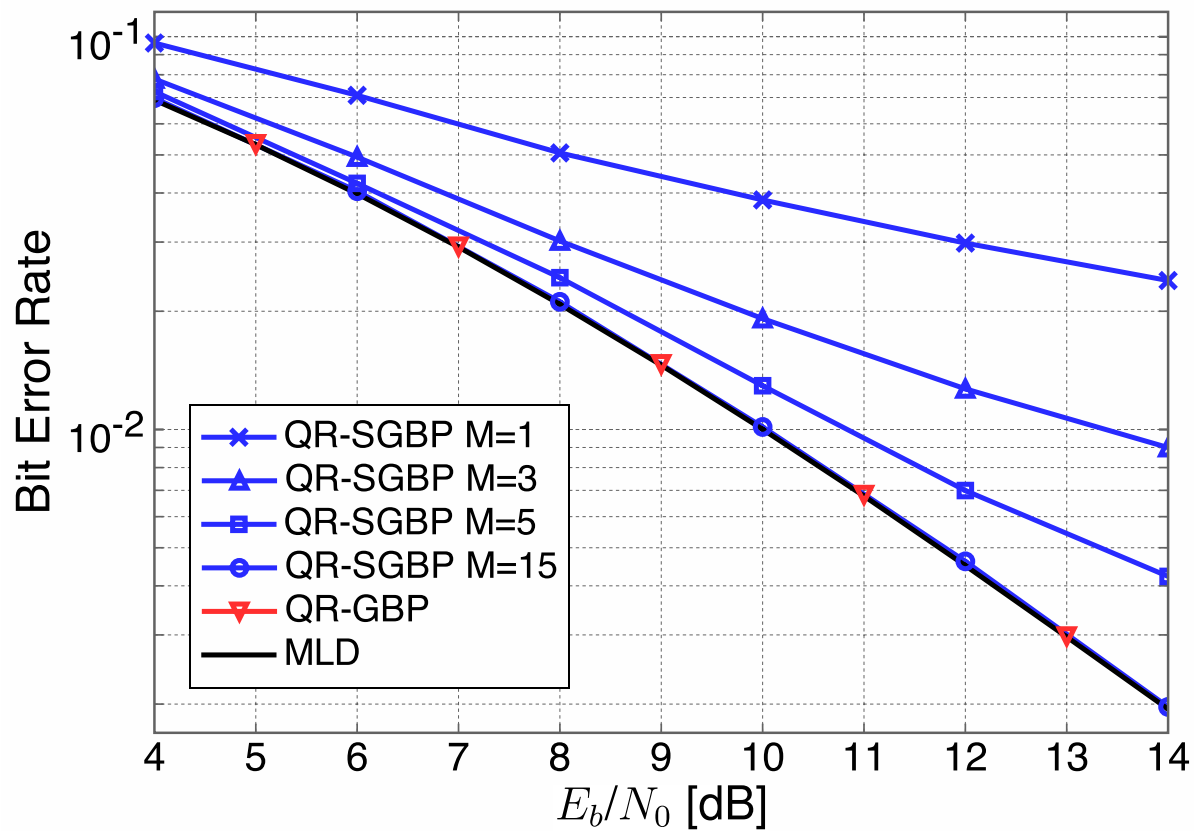


図 5.2:  $(N_t, N_r) = (2, 2)$  とした時の, SGBP 法, GBP 法, MLD の BER 特性

## 5.2 SMR 付き QR-GBP 法

本章では QR-GBP 法の演算量低減のための SMR について説明する。SMR は QR 分解後の領域グラフの構造を利用することで更新に用いるメッセージの数を削減する手法である。(4.4) 式の右辺に表れる全てのメッセージと変数を

$$M(\mathbf{x}_{PR}) = \frac{\prod_{(I,J) \in N(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)}{\prod_{(I,J) \in D(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)} \quad (5.10)$$

とした時、QR-GBP 法のメッセージ更新式は以下のように書き表される。

$$m_{P \rightarrow R}^{(t)}(\mathbf{x}_R) := \sum_{\mathbf{x}_P \setminus \mathbf{x}_R} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) M(\mathbf{x}_{PR}) \quad (5.11)$$

Max-log 近似を (5.11) 式に適用すると以下のようになり、

$$\log[m_{P \rightarrow R}^{(t)}(\mathbf{x}_R)] = \max_{\mathbf{x}_P \setminus \mathbf{x}_R} [\log[p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) M(\mathbf{x}_{PR})]] \quad (5.12)$$

メッセージ更新式は (5.12) 式の右辺を最大にするようなメッセージの組み合わせを見つける問題とすることができる。

次に、演算量低減のために (5.12) 式の右辺に現れるメッセージの組み合わせの中から用いるメッセージの数を効率的に削減する方法について述べる。(5.11) 式の右辺に表れるメッセージは、各メッセージが持つ変数ごとに分離され、 $n$  番目に多くの変数を持つメッセージとその変数を  $M^{(n)}(\mathbf{x}_{PR}^{(n)})$ ,  $\mathbf{x}_{PR}^{(n)}$  とすれば (5.11) 式は

$$m_{P \rightarrow R}^{(t)}(\mathbf{x}_R) := \sum_{\mathbf{x}_P \setminus \mathbf{x}_R} p(\tilde{y}_P | \mathbf{x}_P) \prod_{n=1}^N M^{(n)}(\mathbf{x}_{PR}^{(n)}) \quad (5.13)$$

と書き換えることができる。QR 分解に由来する領域グラフの構造により、 $p = q$  であれば  $\mathbf{x}_{PR}^{(p)} = \mathbf{x}_{PR}^{(q)}$  となる。さらに、ある領域に着目した時、自身より多くの変数を含む領域は、自身が持つ変数を全て持ち、 $i < j$  であれば  $\mathbf{x}_{PR}^{(i)} \supset \mathbf{x}_{PR}^{(j)}$  という関係が成り立つ。したがって  $\mathbf{x}_{PR}^{(j)} \setminus \mathbf{x}_{PR}^{(i)}$  は自身より大きい領域のみに含まれる。そこで SMR では、 $\mathbf{x}_{PR}^{(j)} \setminus \mathbf{x}_{PR}^{(i)}$  を含むメッセージである  $M^{(j)}(\mathbf{x}_{PR}^{(j)})$  に関して、値の大きいもののみを用いることでメッセージの数を削減し演算量の低減を図る。しかし、除外されたメッセージにより Max-log の判定が変化してしまい、正しい解が選ばれない可能性がある。そこで、除外されたメッセージに関しては補正項  $\gamma$  に置き換えることで、正しい解の見逃しを防ぐ。

SMR の適用について図 4.1(b) の領域  $B$  から領域  $G$  へのメッセージ  $m_{B \rightarrow G}(x_4)$  の更新について説明する。 $m_{B \rightarrow G}(x_4)$  の更新式は

$$\begin{aligned} m_{B \rightarrow G}^{(t)}(x_4) &:= \sum_{x_2, x_3} p(\tilde{y}_2 | x_2, x_3, x_4) \frac{m_{A \rightarrow E}(x_2, x_3, x_4) m_{A \rightarrow F}(x_3, x_4) m_{C \rightarrow F}(x_3, x_4)}{m_{E \rightarrow I}(x_4) m_{F \rightarrow I}(x_4) m_{H \rightarrow J}(x_4)} \\ &= \sum_{x_2, x_3} p(\tilde{y}_2 | x_2, x_3, x_4) M^{(1)}(\mathbf{x}_{BG}^{(1)}) M^{(2)}(\mathbf{x}_{BG}^{(2)}) M^{(3)}(\mathbf{x}_{BG}^{(3)}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

と書き表すことができ、この時

$$M^{(1)}(\mathbf{x}_{BG}^{(1)}) = m_{A \rightarrow E}(x_2, x_3, x_4) \quad (5.15)$$

$$M^{(2)}(\mathbf{x}_{BG}^{(2)}) = m_{A \rightarrow F}(x_3, x_4) m_{C \rightarrow F}(x_3, x_4) \quad (5.16)$$

$$M^{(3)}(\mathbf{x}_{BG}^{(3)}) = \{m_{E \rightarrow I}(x_4) m_{F \rightarrow I}(x_4) m_{H \rightarrow J}(x_4)\}^{-1} \quad (5.17)$$

である。QR-GBP 法の更新式通りに (5.14) 式を展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} m_{B \rightarrow G}^{(t)}(x_4) &= p(\tilde{y}_2 | x_2 = 1, x_3 = 1, x_4) M^{(1)}(x_2 = 1, x_3 = 1, x_4) M^{(2)}(x_3 = 1, x_4) M^{(3)}(x_4) \\ &+ p(\tilde{y}_2 | x_2 = 1, x_3 = -1, x_4) M^{(1)}(x_2 = 1, x_3 = -1, x_4) M^{(2)}(x_3 = -1, x_4) M^{(3)}(x_4) \\ &+ p(\tilde{y}_2 | x_2 = -1, x_3 = 1, x_4) M^{(1)}(x_2 = -1, x_3 = 1, x_4) M^{(2)}(x_3 = 1, x_4) M^{(3)}(x_4) \\ &+ p(\tilde{y}_2 | x_2 = -1, x_3 = -1, x_4) M^{(1)}(x_2 = -1, x_3 = -1, x_4) M^{(2)}(x_3 = -1, x_4) M^{(3)}(x_4) \end{aligned} \quad (5.18)$$

SMR によって用いるメッセージを半分に制限する場合、 $M(\mathbf{x}_{BG}^{(1)})$  の候補は 2 つ、 $M(\mathbf{x}_{BG}^{(2)})$  の候補は 1 つに減らすことができる。例として  $M(\mathbf{x}_{BG}^{(1)})$  の候補が  $M^{(1)}(x_2 = 1, x_3 = -1, x_4)$  と  $M^{(1)}(x_2 = -1, x_3 = -1, x_4)$  に、 $M(\mathbf{x}_{BG}^{(2)})$  の候補が  $M^{(2)}(x_3 = 1, x_4)$  に絞られた場合を考えると、メッセージ更新式は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} m_{B \rightarrow G}^{(t)}(x_4) &= \gamma p(\tilde{y}_2 | x_2 = 1, x_3 = 1, x_4) M^{(2)}(x_3 = 1, x_4) M^{(3)}(x_4) \\ &+ 2\gamma p(\tilde{y}_2 | x_2 = 1, x_3 = -1, x_4) M^{(1)}(x_2 = 1, x_3 = -1, x_4) M^{(3)}(x_4) \\ &+ \gamma p(\tilde{y}_2 | x_2 = -1, x_3 = 1, x_4) M^{(2)}(x_3 = 1, x_4) M^{(3)}(x_4) \\ &+ 2\gamma p(\tilde{y}_2 | x_2 = -1, x_3 = -1, x_4) M^{(1)}(x_2 = -1, x_3 = -1, x_4) M^{(3)}(x_4) \end{aligned} \quad (5.19)$$

ここで  $\gamma$  は前述した補正項であり、 $\gamma$  の係数は除外されたメッセージの数に対応している。 $\gamma$  の値は SMR によって更新に用いられることになったメッセージより大きくならないように、用いられるメッセージの中で最小のものよりも小さな値にする必要がある。そして (5.19) 式に対数領域で Max-log 近似を適用することでメッセージ更新を行う。SMR によって低減される演算量は、用いるメッセージの数をいくつに制限するかに依存している。

そして十分なメッセージ更新の後、(5.23)～(5.20) 式に従って各変数について最小の領域における主観確率を周辺化することで、以下のように各変数の周辺事後確率が計算される。

### 5.2.1 数値例

ここで計算機シミュレーションによって SMR 付き QR-GBP 法の BER 特性を評価する。図 5.3 と図 5.4 はそれぞれ、送受信アンテナ数がそれぞれ 4 本と 8 本の時の BP 法、QR-BP 法、QR-GBP 法、SMR 付き QR-GBP 法および MLD の BER 特性を示す。SMR では更新に用いられるメッセージの数が QR-GBP 法に対して半分になるように制限し、補正項  $\gamma$  は用いられるメッセージの中で最小のものの半分の値とした。繰り返し回数はそれぞれ 5 回と 9 回であり、ダンピング係数は 0.7 である。図 5.4 には SMR による性能劣化を確認するために、Max-log 近似を適用した QR-GBP

法の結果も示す．また，SMR 適用時に Max-log 近似の正しい解が選択されているかを確認するために，図 5.5，図 5.6 に，QR-GBP 法と SMR 付き QR-GBP 法それぞれの各繰り返しにおいて，Max-log 近似で正しい解が選択する確率を示す．

図から， $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時には SMR 付き QR-GBP 法は高 SNR 領域において MLD に漸近する性能を示すことがわかる．しかし  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  においては QR-GBP 法，MLD との間に大きな特性差があることがわかる．

QR-GBP 法のメッセージ更新では全てのメッセージが更新に用いられていたが，SMR は演算量を低減するために用いるメッセージの数を制限し，それによるメッセージ計算の誤りを補正項によって補償する． $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時には補正項により十分な補償がされたため MLD に漸近する性能が得られた．しかし  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時には SMR によって削られるメッセージが多いために，補正項による補償が十分ではなく Max-log 近似の正しい解を見つけ出すことができずに性能が劣化した．図 5.5, 図 5.6 に示すように， $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時には十分な繰り返しの後にも Max-log 近似の正しい解が選択されているが， $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時には繰り返しが増えるごとに正しい解が選択されなくなっている．これは SMR による見逃しによってメッセージが誤って更新され，局所解へと収束してしまっていることを示す．

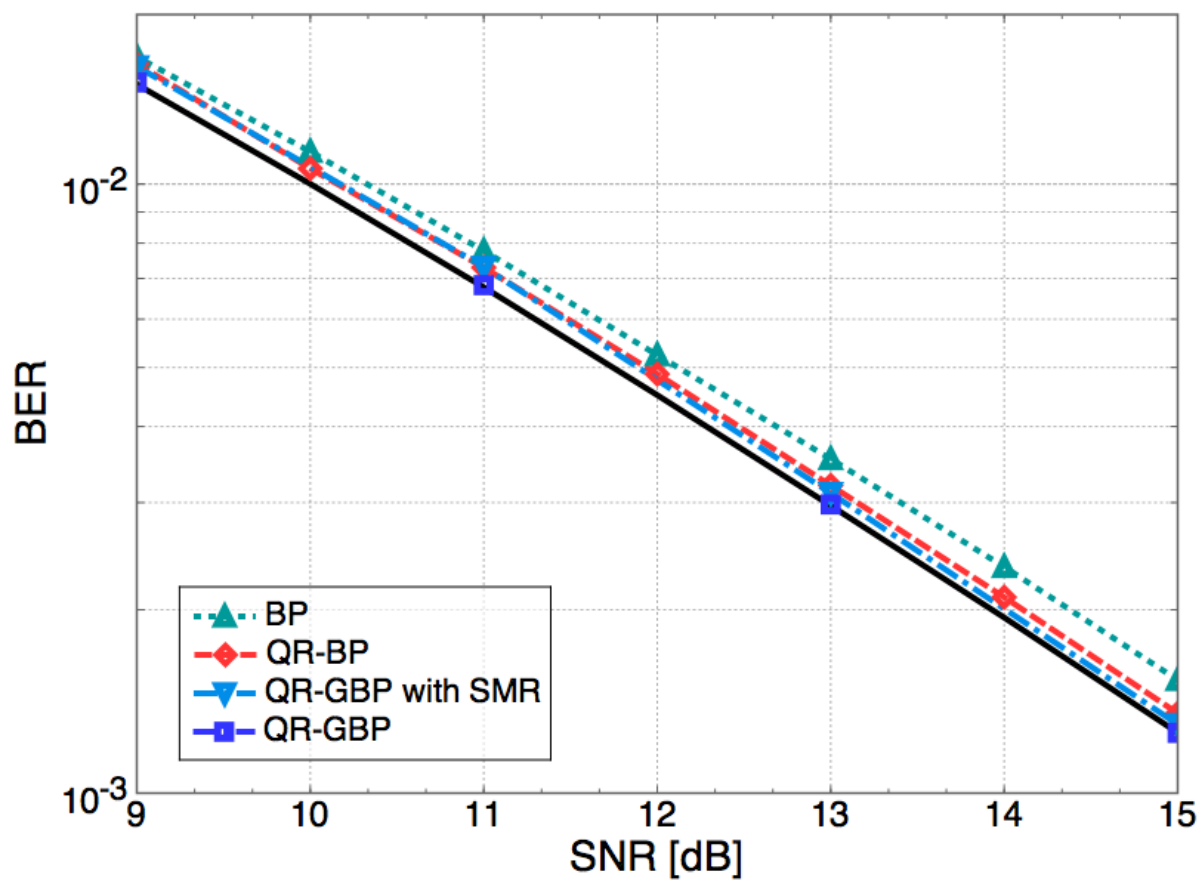


図 5.3:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の BP 法, QR-GBP 法, SMR 付き QR-GBP 法, MLD の BER 特性

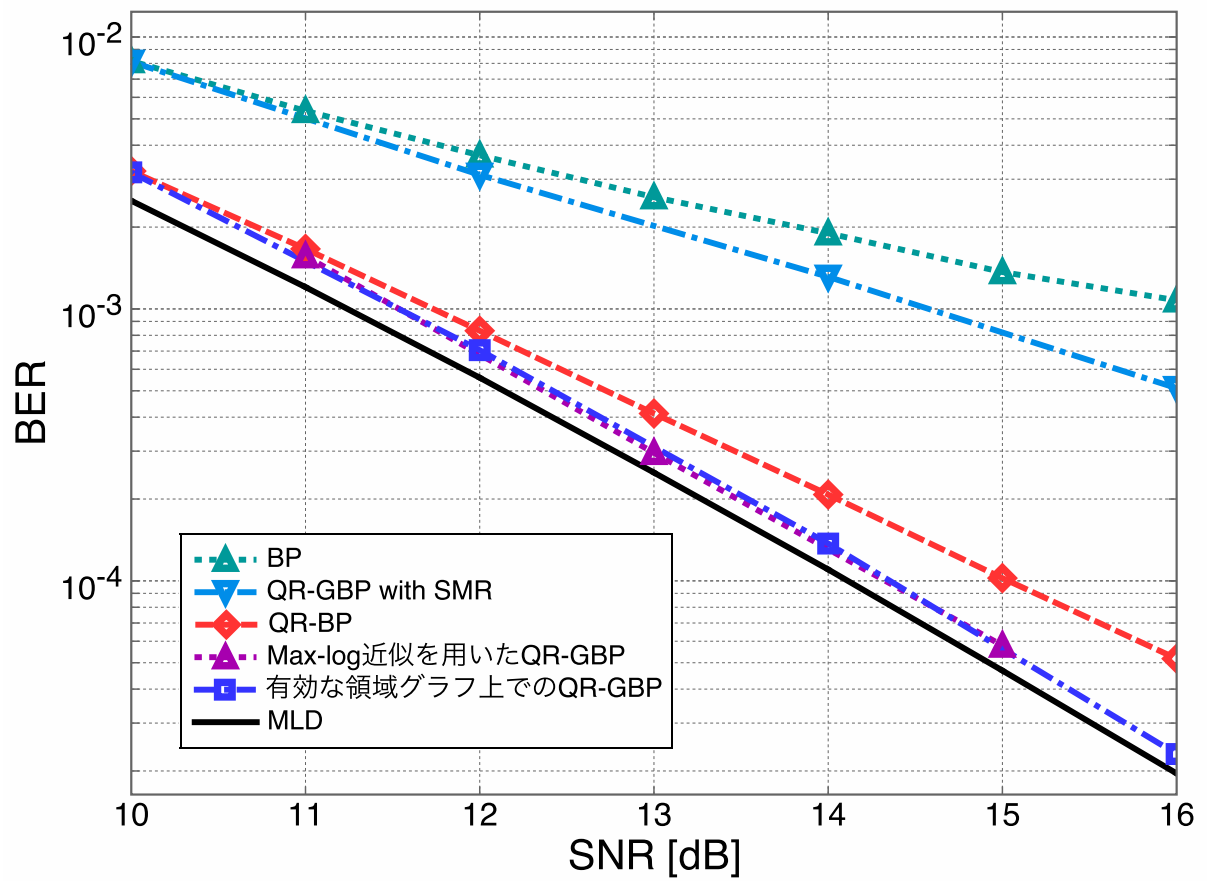


図 5.4:  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時の BP 法, QR-GBP 法, SMR 付き QR-GBP 法, MLD の BER 特性

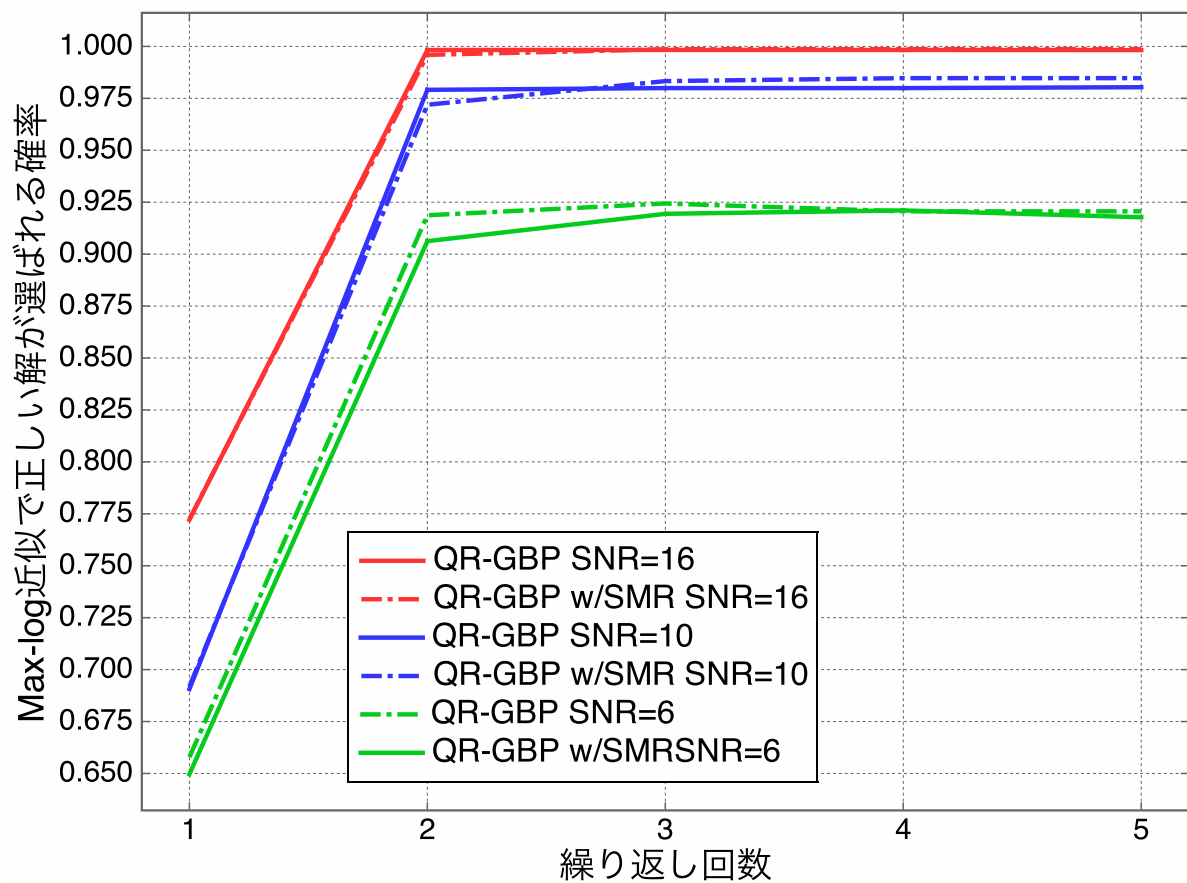


図 5.5:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の繰り返し毎の Max-log 近似の正しい解が選択される確率

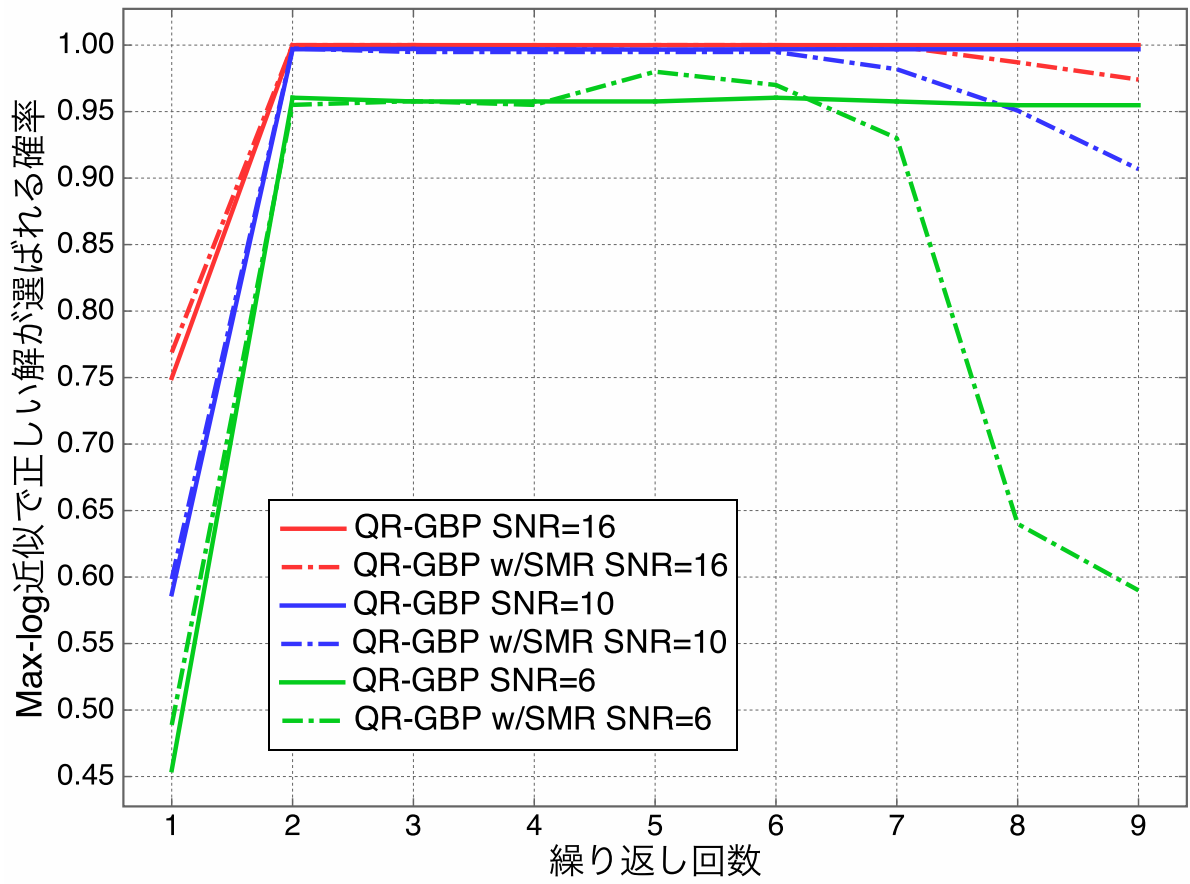


図 5.6:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の繰り返し毎の Max-log 近似の正しい解が選択される確率



### 5.3 エッジ削減 QR-GBP 法

本節では、提案手法である ER-QR-GBP 法について説明する。前節で述べたように、QR-GBP 法のメッセージ更新式内には周辺化計算を含むためアンテナ数と変調多値数の増加に伴い復調に要する演算量が指数的に増加する。QR-SGBP 法では周辺化計算をモンテカルロ積分に置き換えることで演算量の低減を図ったが、変調多値数が小さい場合には演算量の大きな低減は見込めないという問題があった。また、SMR 付き QR-GBP 法は、アンテナ数の増加に伴って Max-log 近似の正しい解を見つけ出す確率が下がり性能が劣化した。

本研究の提案手法である ER-QR-GBP 法では、グラフの構造を変換することで演算量の低減を図る。図 5.7 に示す領域グラフが ER-QR-GBP 法で用いる領域グラフである。この領域グラフは図 4.2 に示した領域グラフから周辺化計算の演算量が高いメッセージに対応するエッジを取り除くことで得られる。図 5.7 に残っているエッジに対応するメッセージの半分は周辺化される変数が最大で 1 つのみであり、残りの半分は周辺化計算の必要ないメッセージである。そのため QR-GBP 法と比べて大幅に演算量を低減することが可能であり、QR-SGBP 法とは異なり変調多値数にかかわらず演算量の低減が可能である。さらに、変調多値数と送受信アンテナ数によっては、繰り返し一回ごとに用いられるメッセージの数が QR-BP 法よりも少ないため QR-BP 法よりも低演算量で復調が可能である。

図 5.7 の領域グラフ上で (4.4) 式に基づいた十分なメッセージ更新の後、以下の式に従ってまず  $x_4$  の周辺事後確率が計算される。

$$p(x_4|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_4} b_D(x_4) \quad (5.20)$$

これによって  $x_4$  を硬判定する。判定の結果を  $X_4$  とすると、 $x_3$  の周辺事後確率は

$$p(x_3|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_3} b_C(x_3, x_4 = X_4) \quad (5.21)$$

$$(5.22)$$

で与えられる。同様にして  $x_1$  と  $x_2$  の周辺事後確率は以下の式で与えられる。

$$p(x_1|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_1} b_A(x_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3, x_4 = X_4) \quad (5.23)$$

$$p(x_2|\mathbf{y}) = \frac{1}{Z_2} b_B(x_2, x_3 = X_3, x_4 = X_4) \quad (5.24)$$

$$(5.25)$$

ここで  $Z$  はビリーフを結合確率へ正規化するための正規化定数である。

以降では、図 5.7 の領域グラフが領域計数とエントロピー最大化の条件を満たしているかどうかの確認と、ER-QR-GBP 法の演算量の評価を行う。

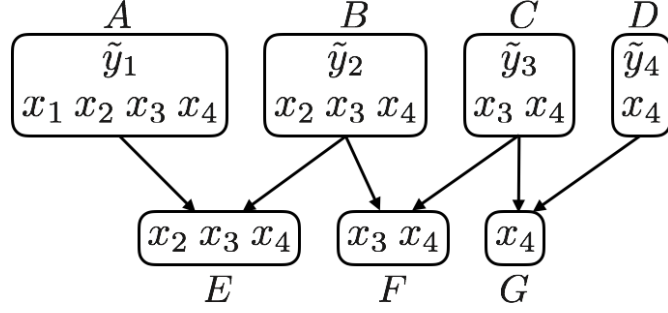


図 5.7: 打ち切り領域グラフから周辺化項が 2 つ以上のメッセージを取り除いた有効な領域グラフ

### 5.3.1 領域グラフが満たすべき条件

図 5.7 の領域グラフの、各領域の領域計数の総和は

$$\begin{aligned}
 \sum_R c_R &= c_A + c_B + c_C + c_D + c_E + c_F + c_G \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + (-1) + (-1) + (-1) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

と計算され、領域計数の条件を満たしていることが確認できた。

また、図 5.7 の領域グラフ全体のエントロピー  $H_{\text{RG}}$  は以下のように計算される。

$$H_{\text{RG}} = H(b_A) + H(b_B) + H(b_C) + H(b_D) - H(b_E) - H(b_F) - H(b_G) \tag{5.27}$$

$\mathbf{x}$  が一様分布に従う時、

$$H(b_B) = H(b_E) \tag{5.28}$$

$$H(b_C) = H(b_F) \tag{5.29}$$

$$H(b_D) = H(b_G) \tag{5.30}$$

となるため (5.27) 式は、

$$H_{\text{RG}} = H(b_A) \tag{5.31}$$

となり、図 4.1(b) の領域グラフ同様に、 $H(b_A)$  は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$  が一様分布に従う時明らかに最大化されるため、図 5.7 の領域グラフはエントロピー最大化の条件も満たすことが確認できた。よって、領域計数の条件とエントロピー最大化の条件を満たすため図 5.7 の領域グラフは有効な領域グラフである。4.1.2 節と同様に、図 5.8 に  $\mathbf{x}_R$  の分布に試行毎に偏りを持った分布を与えた時の領域グラフ全体のエントロピーと、一様分布とした時の領域グラフ全体のエントロピーを比較を示した。図 5.8 から確認できるように、領域グラフ全体のエントロピーは一様分布の時に最大化されている。

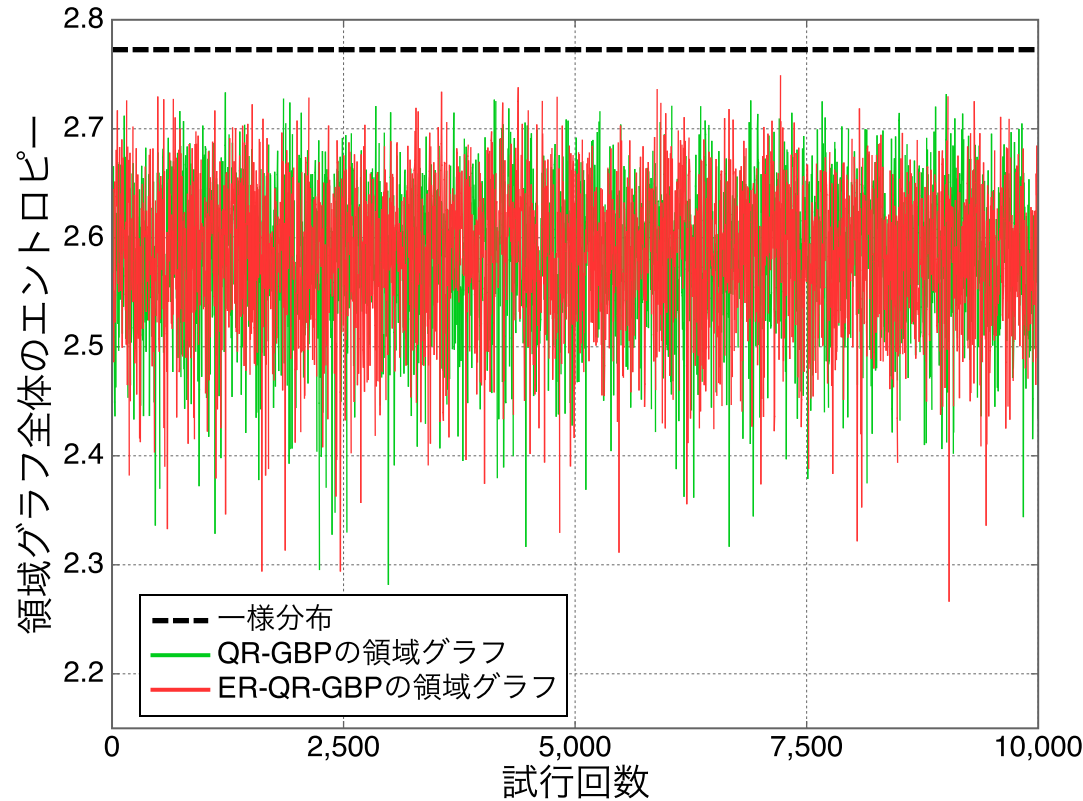


図 5.8: ER-QR-GBP 法の領域グラフ全体のエントロピー

### 5.3.2 演算量の比較

本節では BP 法, QR-BP 法, ER-QR-GBP 法の演算量を比較する. 本節における演算量の定義は, 一回の繰り返しにおいてメッセージ更新時に計算が必要となる周辺化項の総数, とする.

BP 法において, 演算量評価の対象である周辺化計算を含むのは観測ノードから変数ノードへのメッセージであり, (3.14) 式で以下のように与えられた.

$$m_{i \rightarrow j} = \log \left( \frac{\sum_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_j^{+1}} p(\hat{\mathbf{x}}) p(y_i | \hat{\mathbf{x}})}{\sum_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_j^{-1}} p(\hat{\mathbf{x}}) p(y_i | \hat{\mathbf{x}})} \right) \quad (3.14)$$

この時  $\hat{\mathbf{x}}$  は  $N_t - 1$  個の変数からなるベクトルなので, 分母と分子の周辺化項の合計は, 変調多値数を  $M$  として  $2M^{N_t-1}$  で与えられる. BP 法では一回の繰り返しで同様のメッセージ伝播が  $N_t \times N_r$  回行われるため, 以下の式によって BP 法の演算量  $\mathcal{C}_{BP}$  を定義する.

$$\mathcal{C}_{BP} = 2N_t N_r M^{N_t-1} \quad (5.32)$$

次に QR-BP 法の演算量を定義する. QR-BP 法のメッセージ更新において,  $i$  番目の観測ノードで周辺化される変数の数は  $N_t - i$  個であるため, 分母分子の周辺化項の合計は  $2M^{N_t-i}$  で与えられる. 各観測ノードにおいて同じ周辺化項数を持つメッセージが  $N_t - i + 1$  個存在するため, 各観測ノードにおける周辺化項数は  $2(N_t - i + 1)M^{N_t-i}$  で与えられる. よって, 全観測ノードの総和を取ることで, QR-BP 法の演算量  $\mathcal{C}_{QR}$  を

$$\mathcal{C}_{QR} = \sum_{i=1}^{N_r} 2(N_t - i + 1)M^{N_t-i} \quad (5.33)$$

と定義する.

次に QR-GBP 法の演算量を定義するにあたって, メッセージを領域グラフの段数  $s$  ごとに分割する. 図 4.1(b) の領域グラフを例に説明すると, 領域  $A, B, C, D$  から領域  $E, F, G$  へのメッセージは 1 段目のメッセージ, 領域  $E, F, G$  から領域  $H, I$  へのメッセージは 2 段目のメッセージ, 領域  $H, I$  から領域  $J$  へのメッセージは 3 段目のメッセージである. 子領域が左から  $c = 1, \dots, N_r - s$  番目まで存在しており, それらの親領域は  $p = 1, \dots, c + 1$  番目まで存在している. この時あるメッセージの更新時に必要となる周辺化項数は  $M^{c-p+1} M^{N_t-s-c+1} = M^{N_t-s-p+2}$  で与えられる. よって QR-GBP 法の演算量  $\mathcal{C}_{QRGBP}$  は以下の式で与えられる.

$$\mathcal{C}_{QRGBP} = \sum_{s=1}^{N_t-1} \sum_{p=1}^{c+1} M^{N_t-s-p+2} \quad (5.34)$$

最後に ER-QR-GBP 法の演算量を定義する. ER-QR-GBP 法の領域グラフにおいて周辺化計算の必要なメッセージは, 任意の親領域  $L$  から, 1 つのみ存在する  $L$  より変数の少ない子領域  $S$  へのメッセージ  $m_{L \rightarrow S}(\mathbf{x}_S)$  である. 図 5.7 の領域グラフを例に挙げると, 周辺化計算の必要なメッセージは  $m_{A \rightarrow E}(x_2, x_3, x_4)$ ,  $m_{B \rightarrow F}(x_3, x_4)$ ,  $m_{C \rightarrow G}(x_4)$  の 3 つである.  $\mathbf{x}_S$  が含む変数の数を  $K_S$  とした時,  $m_{L \rightarrow S}(\mathbf{x}_S)$  が取り得るパターン数は  $M^{K_S}$  で与えられる. ER-QR-GBP 法では  $m_{L \rightarrow S}(\mathbf{x}_S)$  の

全パターンの更新につき 1 変数の周辺化を行うので、 $m_{L \rightarrow S}(\mathbf{x}_S)$  の更新には  $M \times M^{K_S} = M^{K_S+1}$  の周辺化項を要することになる。ER-QR-GBP 法の領域グラフの特徴として周辺化の必要なメッセージ  $m_{L \rightarrow S}(\mathbf{x}_S)$  の数は  $N_t - 1$  個であり、それぞれに対して  $K_S = 1, \dots, N_t - 1$  であるため、ER-QR-GBP 法の演算量  $C_{ER}$  を以下のように定義する。

$$C_{ER} = \sum_{K_S=1}^{N_t-1} M^{K_S+1} \quad (5.35)$$

図 5.9, 図 5.10, 図 5.11, 図 5.12 に、送受信アンテナ数および変調多値数を変化させた時の演算量の評価結果を示す。

図 5.9 は  $M = 2$  (BPSK) とした時に送受信アンテナ数を変化させた時の演算量である。図 5.9 からわかるように、BP 法および QR-BP 法と比較して提案手法である ER-QR-GBP 法の方が一回の繰り返しに要する演算量が低いことがわかる。

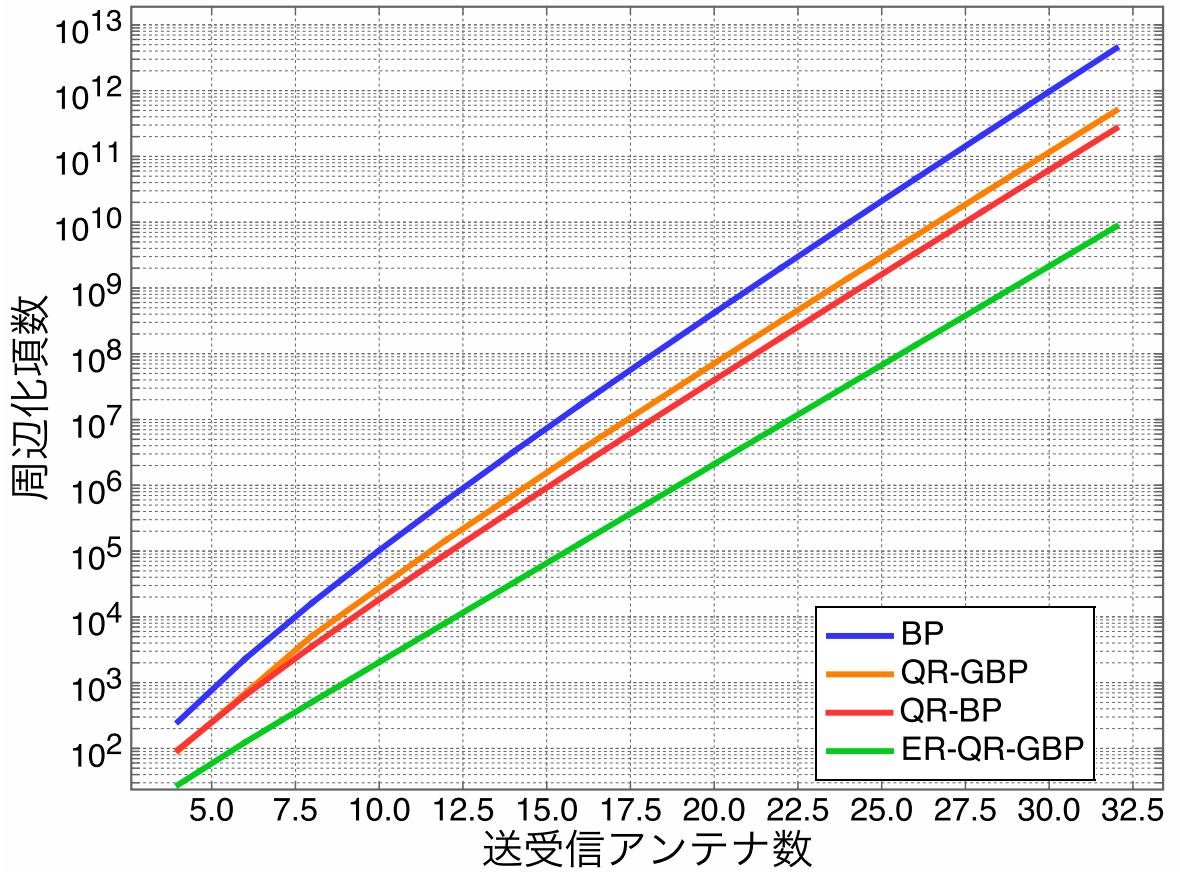
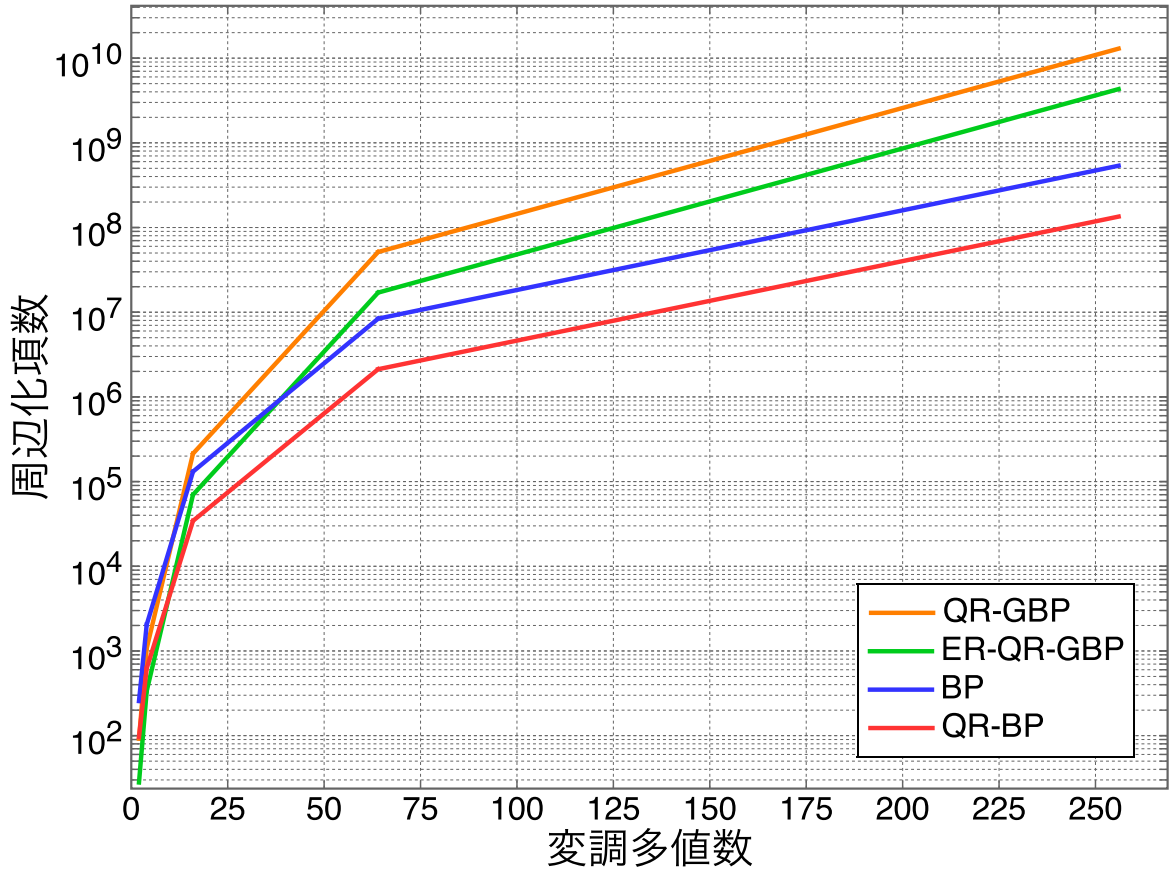


図 5.9:  $M = 2$  とした時の送受信アンテナ数に対する演算量

図 5.10, 図 5.11 はそれぞれ送受信アンテナ数を 4 本と 8 本とし、変調多値数を変化させた時の演算量である。どちらの図においても、変調多値数が増加するに従って ER-QR-GBP 法の演算量

図 5.10:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  とした時の変調多値数に対する演算量

が BP 法と QR-BP 法を上回っている。これは (5.32) 式, (5.33) 式において変調多値数  $M$  のべき数が最大で  $N_t - 1$  であるのに対して, (5.35) 式では最大で  $N_t$  であることに由来している。

図 5.12 は,  $M = 16$  として送受信アンテナ数を変化させた時の演算量である。図 5.10 から, 送受信アンテナ数が 4 本の時に変調多値数が  $M = 16$  だと, ER-QR-GBP 法の演算量は QR-BP 法の演算量を上回ることがわかる。しかし, 送受信アンテナ数を 8 本とした時に演算量はほぼ同等となり, 9 本以上にした時には ER-QR-GBP 法の演算量は QR-BP 法より低くなっている。

以上のことから, 提案手法である ER-QR-GBP 法は, 送受信アンテナおよび変調多値数によっては BP 法および QR-BP 法を下回る演算量を達成可能な手法であることがわかる。

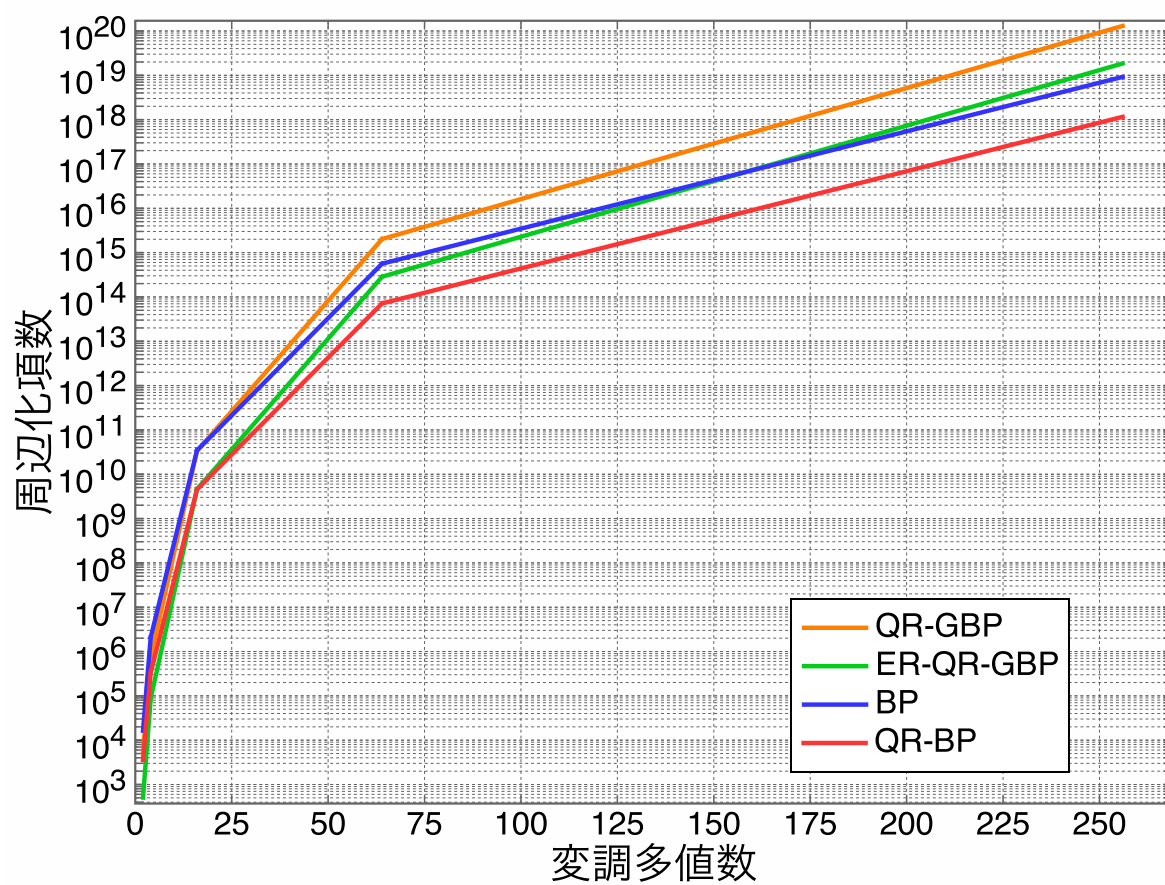


図 5.11:  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  とした時の変調多値数に対する演算量

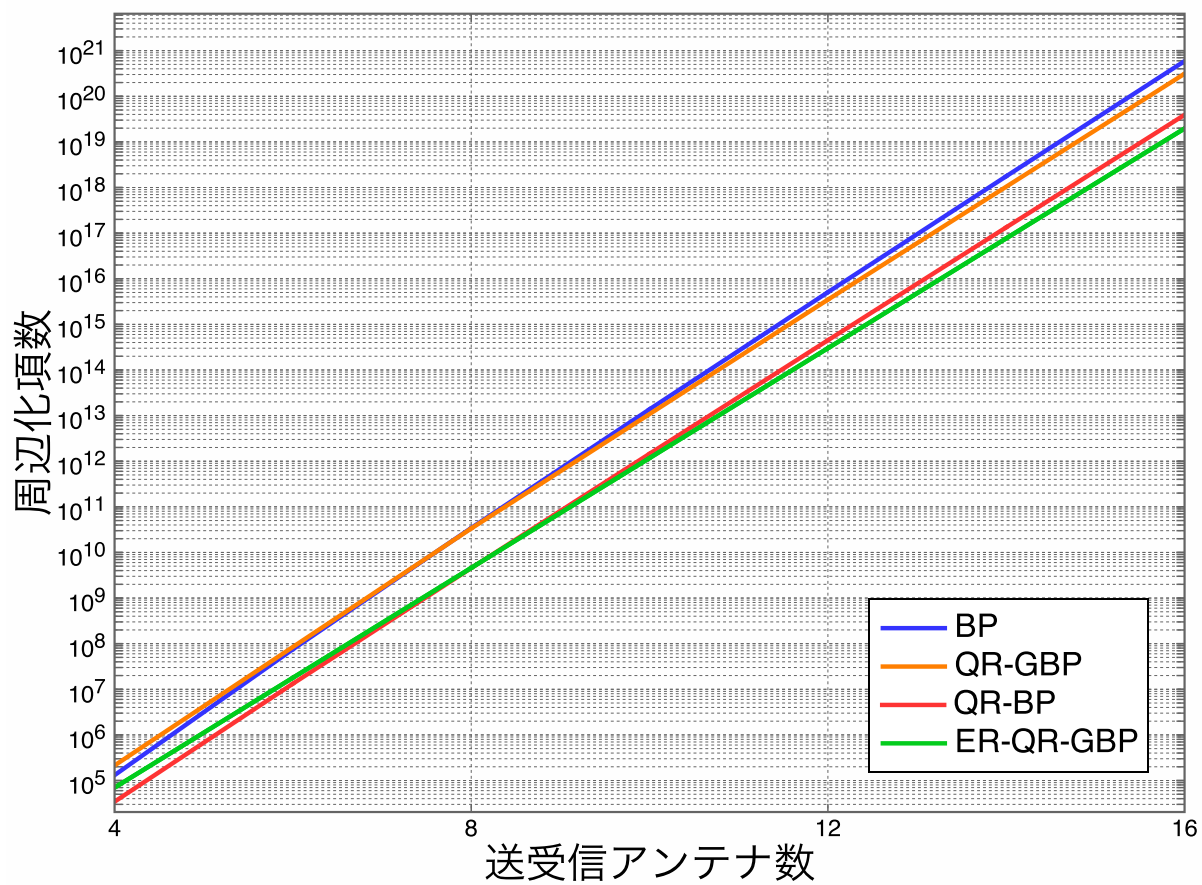


図 5.12:  $M = 16$  とした時の送受信アンテナ数に対する演算量



## 5.3.3 数値例

最後に計算機シミュレーションによって ER-QR-GBP 法の BER 特性および演算量を評価する。図 5.13 と図 5.14 にそれぞれ  $(N_t, N_r) = (4, 4)$ ,  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  とした時の, BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法, ER-QR-GBP 法, MLD の BER 特性を示す。BP 法, QR-BP 法の繰り返し回数はそれぞれ 10 回と 15 回であり, ダンピング係数はそれぞれ 0.7 と 0.8 とした。QRGBP 法, ER-QR-GBP 法の繰り返し回数は,  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時はそれぞれ 5 回と 3 回,  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時はそれぞれ 9 回と 7 回とし, ダンピング係数は全ての場合において 0.7 とした。

図 5.13, 図 5.14, 図 5.9 から分かるように, 提案手法である ER-QR-GBP 法は, QR-BP 法より少ない演算量で QR-BP 法と同様に MLD に漸近する性能を示している。

さらに図 5.14 から分かるように, ER-QR-GBP 法の BER 特性は, ER-QR-GBP 法と同様に有効な領域グラフを用いている QR-GBP 法の BER 特性よりも優れている。これは, 領域グラフから複数のエッジを取り除いたことで領域グラフ上のループ構造がなくなり, 正確に周辺事後確率が計算されたことが原因であると考えられる。

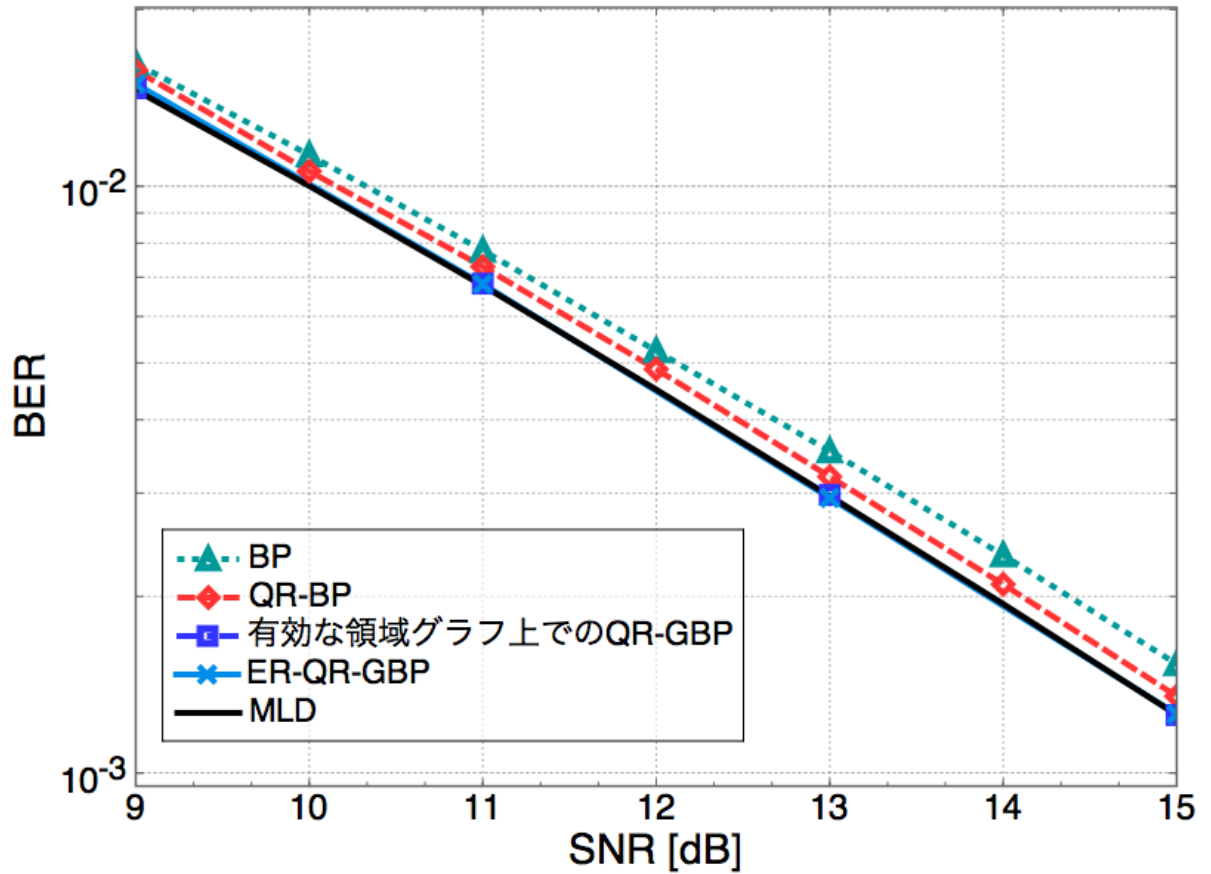


図 5.13:  $(N_t, N_r) = (4, 4)$  の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法, ER-QR-GBP 法, MLD の BER 特性

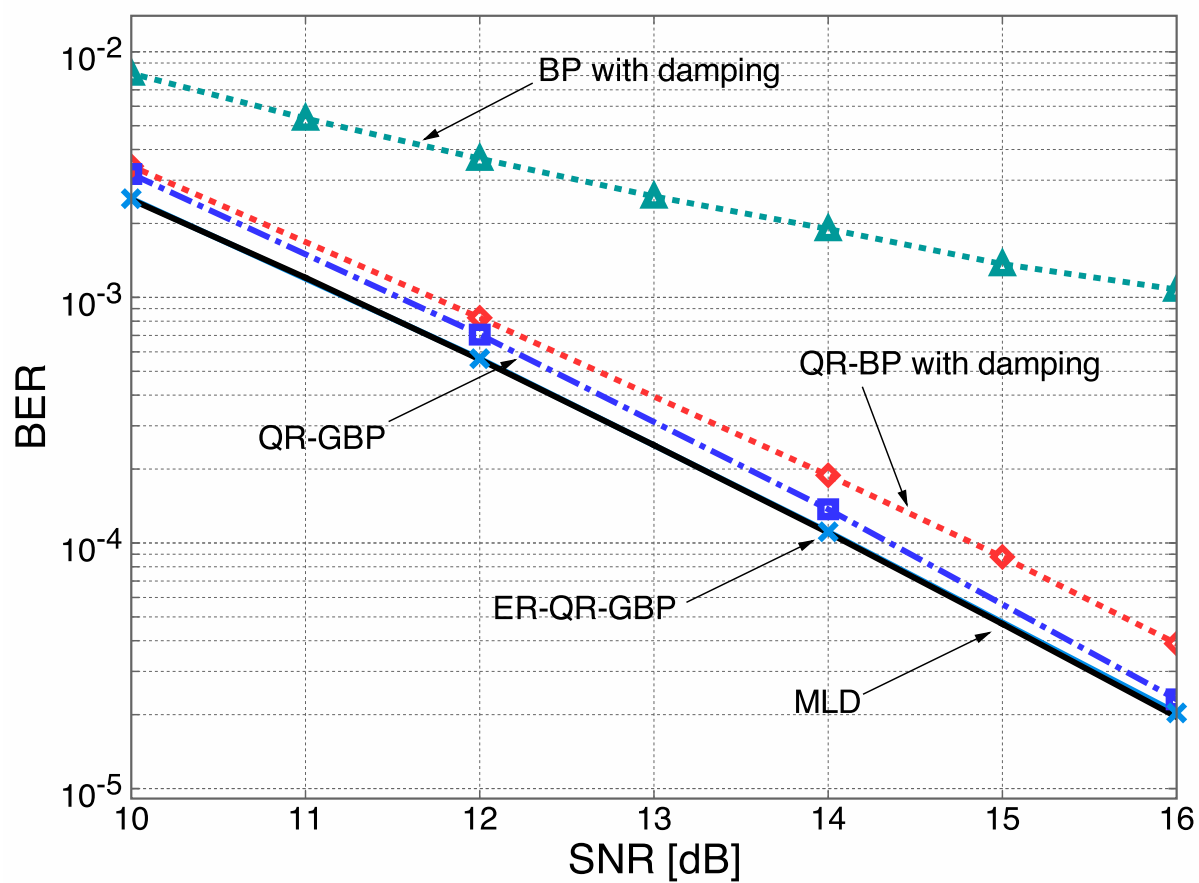


図 5.14:  $(N_t, N_r) = (8, 8)$  の時の BP 法, QR-BP 法, QR-GBP 法, ER-QR-GBP 法, MLD の BER 特性

## 第6章 結論

本研究では，MIMO システム復調法で最適である MLD に漸近する性能を示す QR-GBP 法の演算量低減手法を提案した．提案手法は周辺化計算の省略，メッセージ数の制限，グラフの変換に基づくものであったが，いずれも送受信アンテナ数や変調多値数によって，QR-GBP 法よりも小さい演算量で MLD に漸近する性能が得られることを計算機シミュレーションから示した．

## 謝辞

初めに，本論文の執筆，及びこれまでの研究活動にあたり，非常に多くの助言を賜りました石橋功至准教授に深く感謝致します．加えて，研究内容に関し，有意義な議論を交わして頂いた電通大 AWCC 山尾泰教授，藤井威生教授，安達宏一准教授にも感謝申し上げます．石橋研究室を始め，山尾研究室，藤井研究室，安達研究室のメンバーの皆様にも日頃より大変お世話になりました．ありがとうございました．

最後に，ここまで支えていただいた家族に心より感謝の意を表します．

## 関連発表

### 国際会議 3 件

1. A.D. Shigyo, S. Tanabe, and K. Ishibashi, “QR-decomposed generalized belief propagation for MIMO detection,” in The International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA’16), Monterey, CA, pp. 468–472, (2016.11).
2. S. Tanabe, A. D. Shigyo, and K. Ishibashi, “Not-So-Large MIMO Signal Detection Based on Damped QR-Decomposed Belief Propagation,” 2016 International Symposium on Information Theory and its Applications, Monterey, CA, (2016.10-11)
3. A.D. Shigyo and K. Ishibashi, “QR-Decomposed Generalized Belief Propagation with Smart Message Reduction for Low-Complexity MIMO Signal Detection,” in Asia Pacific Signal and Information Processing Association (APSIPA’17), Kuala Lumpur, Maraysia, (2017.12).

### 国内研究会 4 件

1. 執行デイベッド彬秀, 田邊将吾, 石橋功至, “16QAM 信号に対する QR 分解付きガウス確率伝播法に基づく中規模 MIMO 信号検出に関する一検討,” 電子情報通信学会 2016 ソサイエティ大会, B-5-119, 北海道大学, (2016.9)
2. 田邊将吾, 執行デイベッド彬秀, 石橋功至, “QR 分解付き確率伝播法を用いた中規模 MIMO 信号検出における計算量削減法,” 電子情報通信学会 2016 ソサイエティ大会, B-5-118, 北海道大学, (2016.9)
3. 田邊将吾, 執行デイベッド彬秀, 石橋功至, “低計算量 MIMO 信号検出のための確率的ノード選択を用いた確率伝播法,” 情報理論とその応用シンポジウム 2016, pp. 19–24, 高山市 (2016.12)
4. 執行デイベッド彬秀, 田邊将吾, 石橋功至, “確率的一般化確率伝播法を用いた低演算量 MIMO 復調法に関する一検討,” 信学技報, (2017.1)

## 参考文献

- [1] J. Hu and T. M. Duman, “Graph-based detection algorithms for layered space-time architectures,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 26, no. 2, pp. 269–280, Feb. 2008.
- [2] F. R. Kschischang, B. J. Frey, and H.-A. Loeliger, “Factor graphs and the sum-product algorithm,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 498–519, Feb. 2001.
- [3] J. S. Yedidia, W. T. Freeman, and Y. Weiss, “Constructing free energy approximations and generalized belief propagation algorithms,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 7, pp. 2282–2312, July 2005.
- [4] J. Soler-Garrido, R. J. Piechocki, K. Maharatna, and D. McNamara, “Analog MIMO detection on the basis of Belief Propagation,” in 49th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS ’06), pp. 50–54, Aug. 2006.
- [5] S. Park and S. Choi, “QR decomposition aided belief propagation detector for MIMO systems,” *Electron. Lett.*, vol. 51, no. 11, pp. 873–874, May. 2015.
- [6] O. Shental, A. J. Weiss, N. Shental, and Y. Weiss, “Generalized belief propagation receiver for near-optimal detection of two-dimensional channels with memory,” in IEEE Information Theory Workshop (ITW), 2004, pp. 225–229.
- [7] A.D. Shigyo, S. Tanabe, and K. Ishibashi, “QR-decomposed generalized belief propagation for MIMO detection,” in The International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA’16), Monterey, CA, pp. 468–472, Nov. 2016.
- [8] 田邊将吾, 石橋功至, “確率的な一般化確率伝播法を用いた低演算量 MIMO 復調法に関する一検討,” 信学技報, (2017.1)
- [9] A.D. Shigyo and K. Ishibashi, “QR-Decomposed Generalized Belief Propagation with Smart Message Reduction for Low-Complexity MIMO Signal Detection,” in Asia Pacific Signal and Information Processing Association (APSIPA’17), Kuala Lumpur, Malaysia, (2017.12).
- [10] F. Haddadpour, M.J. Siavoshani, M. Noshad, “Low-Complexity Stochastic Generalized Belief Propagation,” in IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), Barcelona, Spain, 2016.
- [11] E. G. Larsson, F. Tufvesson, O. Edfors, and T. L. Marzetta, Large MIMO Systems, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 52, no. 2, pp. 186–195, Feb. 2014.
- [12] 林 和則, “確率伝播法とその応用”, 数理解析研究所講究録 2008 , 第 1616 巻, 16–40.

- [13] R. Kikuchi, “A theory of cooperative phenomena,” *Phys. Rev.*, vol. 81, no. 6, pp. 988–1003, 1951.